

תלמידים יקרים

מועד הבחינה קרב ועימו הצורך והרצון להתנסות ולתרגל את שלמדתם. בספר שברשותכם 40 מבחנים, הערוכים במתכונת בחינת הבגרות על פי תכנית ההיבחנות החדשה כפי שפרסם משרד החינוך. לתופעות רבות בחיי היום יום יש הסבר מתמטי, בספר זה הבאתי מספר דוגמאות כאלה (בעיקר בנושא 'גידול ודעיכה').

איינשטיין אמר כי 'דמיון חשוב יותר מידע', להצלחה בבחינה נדרשת מידה יפה של ידע אך גם של דמיון . . .

מבנה הספר: בספר 40 בחינות שכל אחת מהן מחולקת לשני פרקים. כל הבחינות מותאמות לתכנית הלימודים ומאפשרות לכם לתרגל את כל הנושאים ברמה גבוהה. 15 הבחינות הראשונות כוללות פתרונות מלאים, 25 הבחינות האחרונות כוללות פתרונות סופיים בלבד (ניתן למצוא באתר רכס פתרונות מלאים לחלקם). בנוסף מצורף נוסחאון ל-5 יח"ל ונוסחאות נוספות שאינן כלולות בנוסחאון.

הנחיות לפתרון הבחינות:

- רצוי לפתור את הבחינות במלואן וכך לנצל את הספר גם כ'מאגר' שאלות.
- לפני תחילת כתיבת הפתרונות כדאי לקרוא היטב את כל השאלות והסעיפים. יש להתחיל בפתרון התרגילים הקלים לכם יותר!
- רצוי להקדיש זמן למחשבה, ללא כתיבה! במקרים רבים הזמן המוקדש למחשבה מאפשר להגיע לפתרון קל יותר ובזה ייצא שכרם בהפסדכם.
- יש להקפיד על כתיבה מתמטית מדויקת ומסודרת, להוסיף נימוקים והסברים במידת הצורך ולהדגיש תשובות סופיות ב'מרקר' (או בדרך אחרת). בסיום כל שאלה יש לבדוק כי אכן עניתם על הנדרש.

אני מאחל לכם הצלחה בבחינת הבגרות ומקווה שהספר יהיה לכם לעזר.

רועי עקביה

דגשים לכתיבת מבחן הבגרות

הטבלה הבאה מרכזת הערות בסיסיות לנושאי מבחן הבגרות. הערה כללית המתייחסת לכל הנושאים בבחינה זו ובבחינות אחרות: "אם יש ספק, אין ספק!" - בכל מקום בו יש ספק לגבי רמת הפירוט, הנימוק או השימוש במשפט מסוים, רצוי לנהוג לפי "בית שמאי" (קפדנות).

הערות	הנושא
<ul style="list-style-type: none"> ● בבעיות המשלבות גיאומטריה יש לשים לב כי לא תמיד המכפלה הסקלרית של שני וקטורים נתונים, שווה לאפס. למשל, בתיבה שבה מוגדרים האלכסונים כווקטורים נתונים. ● ניתן להשתמש במשפטים הבאים ללא הוכחה: <ul style="list-style-type: none"> ◆ ישר ניצב למישור אם ורק אם הוא מאונך לשני ישרים לא מקבילים במישור. ◆ ישר במישור ניצב למשופע למישור אם ורק אם הוא מאונך להיטל המשופע על המישור. ◆ ישר ניצב למישור ABC אם ורק אם $\overline{OA} \perp \overline{OB} = \overline{OC}$ כאשר I וקטור על הישר ו-O ראשית הצירים. ◆ כל וקטור במישור ניתן להצגה יחידה כקומבינציה ליניארית של שני וקטורים בלתי תלויים במישור, וכל קומבינציה כזו נמצאת במישור. ◆ כל שלושה וקטורים בלתי תלויים במרחב הם בסיס למרחב. 	<h3>וקטורים</h3>
<ul style="list-style-type: none"> ● יש לנמק כל שלב בפתרון על ידי ניסוח המשפט הגיאומטרי המתאים. ● רצוי לדעת למצוא משוואות משיקים על פי נגזרת המשוואות הגיאומטריים. 	<h3>גיאומטריה אנליטית</h3>

הערות	הנושא
<ul style="list-style-type: none"> ● נדרש ידע בסדרות (איבר כללי וסכום סדרה). ● נדרש ידע בזהויות טריגונומטריות. ● רצוי להכיר את נוסחאות וייטה - שימוש בהן מאפשר פתרון נוח יותר. ● נדרש ידע בגיאומטריה אנליטית ובמקומות גיאומטריים. ● יש לבחור את ההצגה הנוחה יותר לפתרון הבעיה אלגברית או טריגונומטרית. 	מספרים מרוכבים
<ul style="list-style-type: none"> ● רצוי לשרטט בנפרד מהשרטוט של הגוף הנפחי, את המשולש הרלוונטי לשלב הפתרון. ● יש לנמק כל שלב בפתרון על ידי ניסוח המשפט הגיאומטרי המתאים. ● נדרש להכיר את הזהויות הטריגונומטריות והמשפטים הגיאומטריים. ● נדרש ידע במושגים ובמשפטים הבאים: <ul style="list-style-type: none"> ◆ זיהוי היטל של משופע על מישור. ◆ זווית בין ישרים. ◆ ישר ניצב למישור. ◆ ישר משופע למישור. ◆ זווית בין ישר למישור. ◆ זווית בין מישורים. ◆ משפט שלושת האנכים. 	טריגונומטריה במרחב
<ul style="list-style-type: none"> ● נדרש ידע בחוקי חזקות ומעריכים ובלוגריתמים. ● נדרשת הבנה וידע של משמעות המושג "זמן מחצית חיים". ● רצוי להכיר את המושג קצב הגדילה/דעיכה: משמעות הנגזרת של פונקציית הגידול/דעיכה $\frac{dM}{dt} = M_t \cdot \ln q$. 	גדילה ודעיכה

הערות	הנושא
<ul style="list-style-type: none"> ● נקודות קיצון וסוגן: ◆ יש למצוא את שיעור ה-Y בנקודה ולרשום כזוג סדור (x, y). ◆ ניתן לקבוע את סוג הנקודה לפי נגזרת שנייה או באמצעות טבלה. שימוש בגזירת מונה בלבד בפונקציית מנה ילווה בהערה/נימוק. ◆ בפונקציה המוגדרת בתחום סגור יש לבדוק את ערכי הפונקציה בקצות הקטע ולציין אם מתקבלות נקודות קיצון מקומיות/ מוחלטות. ● אסימפטוטות אופקיות יש לבדוק בנפרד עבור $x \rightarrow \infty$ ו- $x \rightarrow -\infty$. לעתים מזומנות יש גבול בצד אחד בלבד, או שקיימים שני גבולות שונים. ● יש להקפיד על רישום נכון בסימון אינטגרל מסוים: $b > a, \int_a^b f(x) dx$ 	<p>חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי</p>

מבחנים



משך הבחינה שעתיים.

פרק א: גאומטריה אנליטית, וקטורים, מספרים מרוכבים, טריגונומטריה במרחב

(סה"כ: $66\frac{2}{3}$ נקודות)
ענה על שתיים מבין השאלות 1-3 (בכל שאלה - $33\frac{1}{3}$ נקודות)

שאלה 1

נתונה הפרבולה $y^2 = 2px$. דרך נקודה A על גרף הפרבולה ברביע הראשון ששיעור ה-X שלה הוא $X_A = \frac{1}{2}p$ עובר ישר המאונך למשיק לגרף הפרבולה בנקודה A. הישר חותך את גרף הפרבולה בנקודה B (ברביע הרביעי).

הישר המשיק לגרף הפרבולה בנקודה B חותך את ציר ה-Y בנקודה C.

(א) הבע באמצעות P את משוואת הישר AB.

(ב) חשב את P אם בנוסף נתון כי $S_{ABC} = 600$.

שאלה 2

הווקטורים $\underline{u} = (2, 1, 2)$, $\underline{v} = (3, 2t, t)$ מגדירים את מישור π .

(א) מצא את הפרמטר t אם נתון כי הזווית בין \underline{u} ו- \underline{v} היא מינימלית.

(ב) המישור π יוצר עם צירי השיעורים פירמידה בעלת נפח 72 והוא חותך את ציר ה-Y בנקודה ששיעורה חיובי.

מצא את משוואת המישור π .

שאלה 3

נתונה המשוואה $z^{2n} + z^n + 1 = 0$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 1$).

(א) פתור את המשוואה (הצג פתרונות בצורה טריגונומטרית).

(ב) חשב את מכפלת הפתרונות: $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \dots \cdot z_{2n}$.

(ג) פתרונות המשוואה נמצאים (כולם) על מעגל היחידה והם קודקודים של מצולע בעל $2n$ צלעות.

(I) האם המצולע משוכלל? הסבר.

(II) הראה כי שטח המצולע נתון בביטוי: $S = n \cdot \sin \frac{180}{n} \cdot \cos \frac{60}{n}$

פרק ב: פונקציות וגדילה ודעיכה (סה"כ: $33\frac{1}{3}$ נקודות)
ענה על אחת מבין השאלות 4-5

שאלה 4

נתונה הפונקציה $f(x) = x \cdot e^{ax^2+x}$ (a פרמטר).

(א) מהו ערכו של הפרמטר a אם נתון כי ל- $f(x)$ יש נקודה אחת בלבד שבה מתקיים $f'(x) = 0$?

(ב) הצב את הערך $a = -\frac{3}{8}$ (זהו איננו הערך שהתקבל בסעיף א') וחקור את $f(x)$ על פי הסעיפים הבאים:

(I) תחום הגדרה.

(II) נקודות קיצון.

(III) תחומי עלייה וירידה.

(IV) נקודות חיתוך עם הצירים.

(V) אסימפטוטות מקבילות לצירים.

(ג) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

שאלה 5

נתונה הפונקציה $f(x) = \ln(\ln x)$.

(א) מהו תחום ההגדרה של $f(x)$ ומהו תחום ההגדרה של $f'(x)$?

(ב) הוכח כי:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \quad (I)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = +\infty \quad (II)$$

(ג) הוכח כי:

(I) $f(x)$ עולה בכל תחום הגדרתה.

(II) $f'(x)$ יורדת בכל תחום הגדרתה.

(ד) הסבר מדוע ל- $f'(x)$ ול- $f(x)$ יש נקודת חיתוך יחידה.

(ה) הישר $y = 0.22715$ חותך את גרף הפונקציה ואת גרף נגזרת הפונקציה באותה נקודה. מצא את

שיעורי נקודת החיתוך.

(ו) גרף הפונקציה $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x} \cdot \ln x}$ מסתובב סביב ציר ה- X ומוגבל על ידי הישרים $x = a$

ו- $x = b$, $(b > a)$. נפח גוף הסיבוב המתקבל הוא $V = \pi \cdot \frac{\ln b}{\ln a}$. חשב את V .



משך הבחינה שעתיים.

פרק א: גאומטריה אנליטית, וקטורים, מספרים מרוכבים, טריגונומטריה במרחב

(סה"כ: $66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3 (בכל שאלה - $33\frac{1}{3}$ נקודות)

שאלה 1

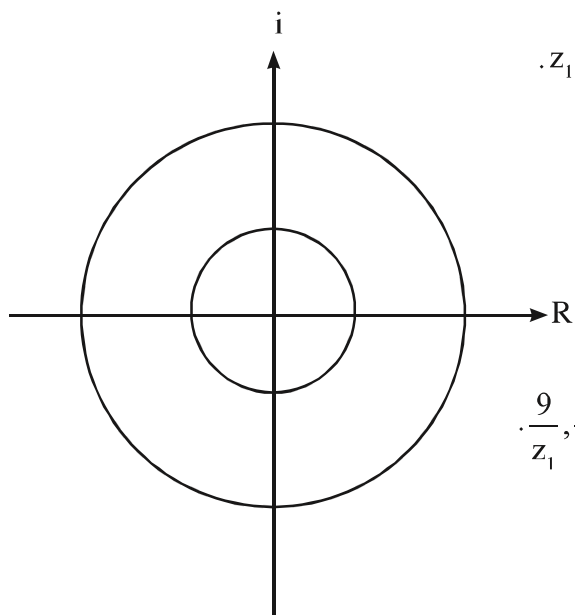
נתונות שתי הפרבולות: $(I): y^2 = 2px$, $(II): y^2 = 2qx$, $(q > p)$. הישר $y = ax$, $(a > 0)$ חותך את פרבולה I בנקודה A ואת פרבולה II בנקודה B. מורידים אנך מנקודה A לציר ה-Y ומורידים אנך נוסף מנקודה B לציר ה-X. שני הישרים נפגשים בנקודה C.

(א) הבע באמצעות p ו-q את משוואת המקום הגיאומטרי של כל הנקודות, C, המתקבלות על ידי אוסף הישרים $y = ax$.

(ב) הישר $x = k$, $(k > 0)$ חותך את הגרפים של הפרבולות (I) ו-(II) ואת הגרף של משוואת המקום הגיאומטרי שמצאת בסעיף א' בנקודות E, D ו-F בהתאמה. הוכח כי שיעורי ה-Y (y_F, y_E, y_D) מהווים שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית. מצא את מנת הסדרה.

שאלה 2

נתונים שני מספרים מרוכבים, z_1 ו- z_2 . המספר z_1 נמצא ברביע השני של מישור גאוס על מעגל שמרכזו בראשית הצירים ומחוגו $r_1 = 3$. המספר z_2 נמצא ברביע הרביעי של מישור גאוס על מעגל שמרכזו בראשית הצירים ומחוגו $r_2 = 7$. נתון: המרובע שקודקודיו הם $\overline{z_1 z_1 z_2 z_2}$ הוא מלבן.



(א) שרטט במערכת הצירים הבאה את המרובע $\overline{z_1 z_1 z_2 z_2}$.

נתון כי שטח חלק המלבן ברביע הראשון

$$S = 6\sqrt{5}$$

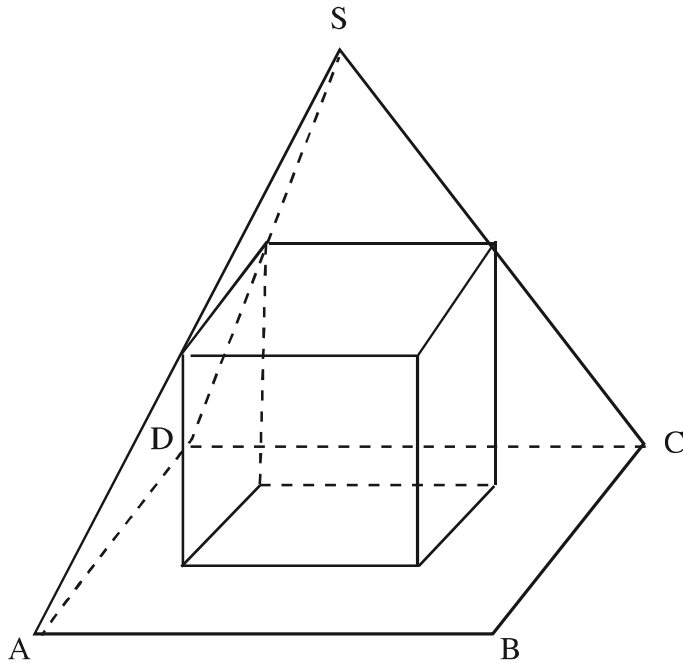
(ב) מצא את z_1 ו- z_2 .

(ג) הראה כי $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ (אין קשר לסעיפים קודמים).

(ד) חשב את שטח המרובע שקודקודיו הם: $\frac{9}{z_1}, \frac{49}{z_2}, \frac{49}{z_2}, \frac{9}{z_1}$.

שאלה 3

ABCD היא פירמידה ישרה שבסיסה (ABCD) הוא ריבוע שאורך מקצועו a.



נתון כי מבין כל התיבות החסומות בפירמידה, כך שבסיסן מונח על בסיס הפירמידה וקודקודיה הנוספים נמצאים על מקצועות הצד של הפירמידה, הגדולה ביותר (בנפח) היא קובייה.

- (א) הבע באמצעות a את גובה הפירמידה.
 (ב) מהי הזווית בין שתי פאות צד סמוכות של הפירמידה?

פרק ב: פונקציות וגדילה ודעיכה (סה"כ: $33\frac{1}{3}$ נקודות)
 ענה על אחת מבין השאלות 4-5

שאלה 4

נתונה הפונקציה $f(x) = \ln(\cos x + e)$.

- (א) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 (ב) מצא את שיעור ה-Y בנקודות המקסימום של הפונקציה ואת שיעור ה-Y בנקודות המינימום של הפונקציה.

סמן את שיעורי ה-Y שמצאת ב: y_{\min} , y_{\max} .

- (ג) מצא את משוואת הישר העובר בנקודות הפיתול של הפונקציה ומקביל לציר ה-X. בטא תשובתך באמצעות e.

(ד) מצא את המרחק בין הישר $y = y_{\max}$ לישר שאת משוואתו מצאת בסעיף ג'. בטא תשובתך באמצעות e .

שאלה 5

נתונה הפונקציה $f(x) = (b^2 - 1) \cdot e^{b-x}$. b הוא פרמטר.

הפונקציה $g(b) = \int_0^1 f(x) dx$ מקיימת:
(א) מצא את הפונקציה $g(b)$.

(ב) (I) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $g(b)$ וקבע את סוגן.

(II) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(b)$ עם הצירים.

(III) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה $g(b)$ (אם הן קיימות).

(ג) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(b)$.



משך הבחינה שעתיים.

פרק א: גאומטריה אנליטית, וקטורים, מספרים מרוכבים, טריגונומטריה במרחב

(סה"כ: $66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3 (בכל שאלה - $33\frac{1}{3}$ נקודות)

שאלה 1

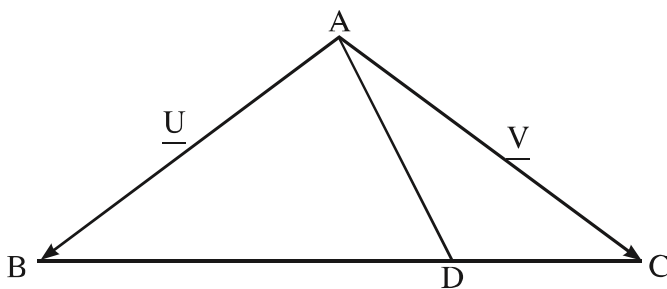
נתון המעגל $x^2 + y^2 - 6x - 16y + 53 = 0$ והפרבולה $y^2 = 2px$. ישר ששיפועו $\frac{1}{2}$ משיק למעגל ולפרבולה.

(א) מצא את משוואת הישר (שני פתרונות).

(ב) מצא את משוואת הפרבולה (שתי פרבולות שונות).

(ג) מצא את נקודות ההשקה של הישר עם המעגל ואת נקודות ההשקה של הישר עם הפרבולה.

שאלה 2



במשולש ΔABC נסמן: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AC} = \underline{v}$.

הנקודה D נמצאת על הצלע BC (או על המשכה)

כך ש: $\overline{CD} = k \cdot \overline{CB}$.

נתון כי: $|\underline{u}| = |\underline{v}|$.

(א) הראה כי מתקיים: $|\underline{u}|^2 = |\overline{AD}|^2 + |\overline{CD}| \cdot |\overline{DB}|$.

(ב) נתון כי $|\overline{AD}| = |\overline{DB}|$. מהו הערך המקסימלי של k?