פתרון שאלה 1

נסמן נקודה (x,y) המקיימת את התנאי.

אורך המשיק מהנקודה (x,y) למעגל (I): $d_1=\sqrt{(x-a)^2+y^2-r^2}$

אורך המשיק מהנקודה (x,y) למעגל (II): $d_2=\sqrt{(x+a)^2+y^2-r^2}$

על פי הנתון: $3d_1=d_2 \leftarrow 3\cdot\sqrt{(x-a)^2+y^2-r^2}=\sqrt{(x+a)^2+y^2-r^2}$

לאחר העלאה בריבוע, פתיחת סוגריים והעברת אגפים, נקבל: $8x^2+8y^2-20ax=8r^2-8a^2$

$$\downarrow$$

$$x^2-2\frac{1}{2}ax+y^2=r^2-a^2$$

$$\downarrow$$

$$\left(x-1\frac{1}{4}a\right)^2+y^2=r^2+\frac{9}{16}a^2$$

תשובה: משוואת המקום הגיאומטרי היא משוואת המעגל: $\left(x-1\frac{1}{4}a\right)^2+y^2=r^2+\frac{9}{16}a^2$.

פתרון שאלה 2

א. נחשב את $\underset{\rightarrow}{u}\cdot\underset{\rightarrow}{v}$: $\underset{\rightarrow}{u}\cdot\underset{\rightarrow}{v}=|\underset{\rightarrow}{u}||\underset{\rightarrow}{v}|\cos 30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=-\underset{\rightarrow}{v}+\frac{1}{2}\underset{\rightarrow}{u} \rightarrow |\overrightarrow{CD}|=\sqrt{\left(-\underset{\rightarrow}{v}+\frac{1}{2}\underset{\rightarrow}{u}\right)^2}=\sqrt{\underset{\rightarrow}{v}^2+\frac{1}{4}\underset{\rightarrow}{u}^2-\underset{\rightarrow}{u}\cdot\underset{\rightarrow}{v}}$$

ולאחר הצבה, נקבל: $|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{1+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{4}}\cong 0.62$

ב. $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}\underset{\rightarrow}{u}+s\underset{\rightarrow}{v}$. צריך להתקיים: $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AB}=0$, $\left(\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{AB}\right)$, לכן:

$\left(-\frac{1}{2}\underset{\rightarrow}{u}+s\underset{\rightarrow}{v}\right)\cdot\underset{\rightarrow}{u}=0 \rightarrow -\frac{1}{2}\underset{\rightarrow}{u}^2+s\underset{\rightarrow}{v}\cdot\underset{\rightarrow}{u}=0$, ולאחר הצבה נקבל: $-\frac{1}{2}+s\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=0 \rightarrow s=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

תשובה: $\overrightarrow{DE}=-\frac{1}{2}\underset{\rightarrow}{u}+\frac{\sqrt{3}}{3}\underset{\rightarrow}{v}$

ג. $$|\overrightarrow{DE}|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\underset{\rightarrow}{u}+\frac{\sqrt{3}}{3}\underset{\rightarrow}{v}\right)}=\sqrt{\frac{1}{4}\underset{\rightarrow}{u}^2+\frac{1}{3}\underset{\rightarrow}{v}^2-\frac{\sqrt{3}}{3}\underset{\rightarrow}{u}\cdot\underset{\rightarrow}{v}}$$

ולאחר הצבה נקבל: $|\overrightarrow{DE}|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{12}}\cong 0.29$

ד. (I) $\overrightarrow{BG}=t\overrightarrow{BC}=t\left(\underset{\rightarrow}{v}-\underset{\rightarrow}{u}\right)$.

נסמן נקודה F על $\overrightarrow{DE}$ כך ש- $\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{DE}=0$ $(*)$.

נרשום: $\overrightarrow{DF}=r\overrightarrow{DE}$ ונביע את $\overrightarrow{GF}$: $\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DF}=t\left(\underset{\rightarrow}{u}-\underset{\rightarrow}{v}\right)-\frac{1}{2}\underset{\rightarrow}{u}+r\left(-\frac{1}{2}\underset{\rightarrow}{u}+\frac{\sqrt{3}}{3}\underset{\rightarrow}{v}\right)$

לאחר סידור נקבל: $\overrightarrow{GF}=\left(t-\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}\right)\underset{\rightarrow}{u}+\left(-t+\frac{\sqrt{3}}{3}r\right)\underset{\rightarrow}{v}$ $(**)$.

הוקטור $\overrightarrow{GF}$ מקביל לוקטור $\overrightarrow{AB}$ כי שניהם ניצבים ל- $\overrightarrow{DE}$, לכן מ- $(**)$ נקבל:

$r=\sqrt{3}\cdot t \leftarrow -t+\frac{\sqrt{3}}{3}r=0$

נציב ב- $(**)$ ונקבל: $\overrightarrow{GF}=\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{2}\right)\underset{\rightarrow}{u}$.

נשווה עתה בין $\left|\overrightarrow{GF}\right|$ ל- $\left|\overrightarrow{DE}\right|$: $\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{12}$. לאחר פתיחת סוגריים וסידור, נקבל:

$\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2 t^2-\frac{2-\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{6}=0$. פתרון המשוואה הריבועית נותן:

$t_1=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}-3}\cong 1.58$, $t_2=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}-3}\cong 5.89$.

(II) הפתרון הראשון מייצג מצב בו הנקודה F נמצאת מעל הנקודה G, כלומר, לפני מפגש הישרים DE ו- BG ואילו הפתרון השני מייצג מצב בו הנקודה F נמצאת מתחת לנקודה G, כלומר, אחרי מפגש הישרים DE ו- BG.

פתרון שאלה 3

א. הערה: תיקון טעות בספר. כתוב $VB'D'$, צריך להיות $CB'D'$.

הפירמידה $ACD'B'$ היא פירמידה ישרה שבסיסה ACB' הוא משולש שווה צלעות ומקצועות הצד שלה שווים באורכם למקצועות הבסיס (כל המקצועות הם אלכסוני פאות בקובייה).

נסמן ב – E נקודה על המקצוע המשותף לשתי הפאות $CB'D'$ ו - ACD' (מקצוע CD') כך שמתקיים $B'E \perp CD'$, $AE \perp CD'$. כל פאות הפירמידה הם משולשים שווי צלעות לכן הגובה לצלע הוא

$AE = B'E = \frac{\sqrt{3}}{2}b$ (כאשר b אורך מקצועות הפירמידה). הזווית בין שתי הפאות היא זווית $\sphericalangle AEB'$.

לפי משפט הקוסינוסים מתקיים $\left(AB'\right)^2 = \left(AE\right)^2 + \left(B'E\right)^2 - 2\left(AE\right)\cdot\left(B'E\right)\cdot\cos\left(\sphericalangle AEB'\right)$

נציב $AE = B'E = \frac{\sqrt{3}}{2}b$, $AB' = b$ ונקבל $\cos\left(\sphericalangle AEB'\right) = \frac{1}{3}$.

תשובה: הזווית בין הפאות $CB'D'$ ו - ACD' היא 70.53^0.

ב. נסמן ב – F נקודה על הפאה ACB' כך ש $D'F \perp ACB'$. נקודה F היא מרכז המעגל החוסם את משולש ACB' (משולש שווה צלעות), לכן F היא נקודת מפגש התיכונים במשולש ACB'.

אורך תיכון במשולש ACB' הוא $\frac{\sqrt{3}}{2}b$ לכן $B'F = \frac{\sqrt{3}}{3}b$.

הזווית בין $B'D'$ לפאה ACB' היא $\sphericalangle D'B'F$ ומתקיים: $\cos\left(\sphericalangle D'B'F\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}b}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ונקבל:

$\sphericalangle D'B'F = 54.74^0$.

ג. גובה הפירמידה הוא $D'F$ והוא שווה ל - $D'F=\sqrt{\left(D'B'\right)^2-\left(B'F\right)^2}=\sqrt{b^2-\frac{1}{3}b^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}b$

שטח בסיס הפירמידה ACB' הוא $S_{ACB'}=\frac{1}{2}b^2\sin 60^0=\frac{\sqrt{3}}{4}b^2$.

ונפח הפירמידה הוא: $V_{ACB'D'}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}b^2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}b=\frac{\sqrt{2}}{12}b^3$.

נסמן את אורך צלע הקובייה ב - a ונראה כי $b=\sqrt{2}a$.

לאחר הצבה נקבל כי נפח הפירמידה הוא $V_{ACB'D'}=\frac{1}{3}a^3$

<u>פתרון שאלה 4</u>

א. המשיק BD:

שיעורי הנקודה D: $D(a,\ln a)$.

שיפוע המשיק: $f'(x)=\frac{1}{x}$ $\leftarrow$ $f'(a)=\frac{1}{a}$

משוואת המשיק: $y-\ln a=\frac{1}{a}(x-a)$ $\leftarrow$ $y_{(BD)}=\frac{1}{a}x+\ln a-1$

המשיק CE:

שיעורי הנקודה E: $E(2a,\ln 2a)$.

שיפוע המשיק: $f'(x)=\frac{1}{x}$ $\leftarrow$ $f'(2a)=\frac{1}{2a}$

משוואת המשיק: $y-\ln 2a=\frac{1}{2a}(x-2a)$ $\leftarrow$ $y_{(CE)}=\frac{1}{2a}x+\ln 2a-1$

ב. שטח המשולש הוא: $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot y_A$.

נמצא את אורך הצלע BC: שיעורי נקודה B הם $B(a-a\ln a,0)$,

שיעורי נקודה C הם $C(2a-2a\ln 2a,0)$.

לכן: $|BC|=a-a\ln a-(2a-2a\ln 2a)=a(\ln 4a-1)$

נמצא עתה את שיעורי נקודה A: $\frac{1}{a}x+\ln a-1=\frac{1}{2a}x+\ln 2a-1$

$$\downarrow$$

$$x_A=2a\ln 2$$

נציב במשוואת BD ונמצא את שיעור ה- y: $y_A=\frac{1}{a}\cdot 2a\ln 2+\ln a-1=\ln 4a-1$.

שטח המשולש הוא: $S(a)=\frac{1}{2}a(\ln 4a-1)^2$.

ג. נגזור את $S(a)$: $S'(a)=\frac{1}{2}(\ln 4a-1)^2+\frac{1}{2}a\cdot 2(\ln 4a-1)\cdot\frac{1}{a}$

נשווה את הנגזרת לאפס ונקבל: $\frac{1}{2}(\ln 4a-1)\cdot(\ln 4a+1)=0$

פתרונות המשוואה הם: $\ln 4a=1 \leftarrow a_1=\frac{1}{4}e$, $\ln 4a=-1 \leftarrow a_2=\frac{1}{4e}$.

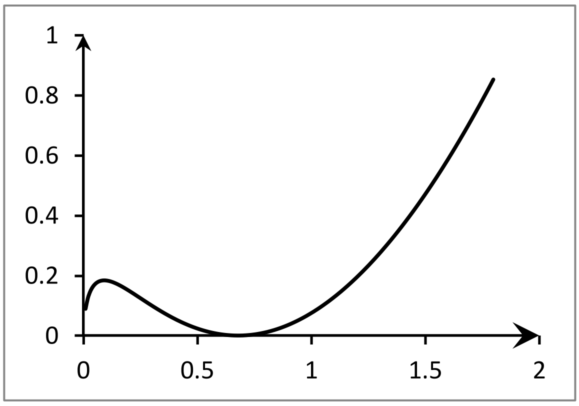
נמצא את סוג נקודות הקיצון: $S''(a)=\frac{\ln 4a}{a} \leftarrow S''\left(\frac{1}{4}e\right)>0$, $S''\left(\frac{1}{4e}\right)<0$.

נמצא עתה את שיעורי הפונקציה בנקודות: $S\left(\frac{1}{4}e\right)=0$, $S\left(\frac{1}{4e}\right)=\frac{1}{2e}$, ונקודות הקיצון הן:

$\max\left(\frac{1}{4e},\frac{1}{2e}\right)$, $\min\left(\frac{1}{4}e,0\right)$.

משמעותה של נקודת המינימום היא שכאשר $a=\frac{1}{4}e$, שני המשיקים נחתכים על ציר ה-x .

ד.



פתרון שאלה 5

א. על – פי הנתון $f''(x)=-2$ לכן $f'(x)=\int f''(x)dx=\int -2dx=-2x+c_1 \quad (*)$.

נגזור את $g(x)$ פעמיים:
$$g'(x)=f'(x)\cdot e^{f(x)}+f''(x)$$
$$g''(x)=f''(x)\cdot e^{f(x)}+f'^2(x)\cdot e^{f(x)}+f'''(x)=e^{f(x)}\cdot\left[f'^2(x)+f''(x)\right]$$

ולאחר הצבת הנתון $f''(x)=-2$ נקבל: $g''(x)=e^{f(x)}\cdot\left[f'^2(x)-2\right]$.

לפונקציה $g(x)$ יש שתי נקודות פיתול ומתקיים: $f'(x_2)=-\sqrt{2}$, $f'(x_1)=\sqrt{2}$.

מ - $(*)$ נקבל: $-2x_1+c_1=\sqrt{2}$, $-2x_2+c_1=-\sqrt{2}$. נחבר את שתי המשוואות ונקבל: $c_1=x_1+x_2$

ולפי הנתון בשאלה $(x_1+x_2=5)$ יתקבל: $c_1=5$.

תשובה: $f'(x)=-2x+5$.

ב. נתון כי גרף הפונקציה $f'(x)$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$.

הפונקציה $f(x)$ היא $f(x)=\int f'(x)dx=\int(-2x+5)dx=-x^2+5x+c_2$

נניח כי שיעור ה – X של נקודת ההשקה הוא x_3, לכן מתקיים:

$$\begin{cases} f'(x_3)=f(x_3) \\ f''(x_3)=f'(x_3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x_3+5=-x_3^2+5x_3+c_2 \\ -2=-2x_3+5 \ \rightarrow \ x_3=3\tfrac{1}{2} \end{cases}$$

לאחר הצבה של $x_3=3\tfrac{1}{2}$ נקבל $c_2=-7\tfrac{1}{4}$ ולכן: $f(x)=-x^2+5x-7\tfrac{1}{4}$.

תשובה: $g(x)=e^{-x^2+5x-7\frac{1}{4}}-2x+5$

ג. נמצא את x_1 ואת x_2 (מסעיף א'), נקבל: $x_1=\dfrac{5-\sqrt{2}}{2}$, $x_2=\dfrac{5+\sqrt{2}}{2}$.

נציב בגבולות האינטגרל ונקבל $\left|\int_{\frac{5-\sqrt{2}}{2}}^{\frac{5+\sqrt{2}}{2}} g''(x)dx\right|=g'(x)\Big|_{\frac{5-\sqrt{2}}{2}}^{\frac{5+\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{8}\cdot e^{-1.5}$

פתרון שאלה 1

א. מוקד הפרבולה בנקודה $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ ומשוואת הישר היא: $y=\sqrt{3}\cdot x-\frac{\sqrt{3}}{2}p$.

נמצא את נקודות החיתוך של הישר והפרבולה: $\left(\sqrt{3}\cdot x-\frac{\sqrt{3}}{2}p\right)^2=2px$. מתקבלת המשוואה הריבועית $3x^2-5px+\frac{3}{4}p^2=0$. פתרונות המשוואה הם: $x_A=\frac{3}{2}p$, $x_B=\frac{1}{6}p$. לאחר הצבה נקבל את שיעורי ה- Y של הנקודות: $A\left(\frac{3}{2}p,\sqrt{3}p\right)$, $B\left(\frac{1}{6}p,-\frac{\sqrt{3}}{3}p\right)$.

ב. מרכז המעגל הוא אמצע קטע AB , $O\left(\frac{5}{6}p,\frac{\sqrt{3}}{3}p\right)$ ומחוג המעגל הוא המרחק AO : $R^2=\frac{16}{9}p^2$.

משוואת המעגל שהקטע AB הוא קוטר שלו, היא: $\left(x-\frac{5}{6}p\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}p\right)^2=\frac{16}{9}p^2$.

ג. מרכזי המעגלים נמצאים בנקודה ששיעור ה- X שלה הוא $x=\frac{5}{6}p$ ושיעור ה- Y שלה הוא $y=\frac{\sqrt{3}}{3}p$.

לאחר חלוקה נקבל: $\frac{y}{x}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}p}{\frac{5}{6}p}=\frac{2\sqrt{3}}{5}$.

לכן, המקום הגיאומטרי של מרכזי המעגלים המתקבלים הוא קו ישר שמשוואתו: $y=\frac{2\sqrt{3}}{5}\cdot x$

פתרון שאלה 2

א. נביע את $\overrightarrow{AE}$ ואת $\overrightarrow{AF}$:

$$\overrightarrow{AE}=\underset{\to}{u}+\frac{1}{2}\underset{\to}{v}+\frac{1}{2}\underset{\to}{w}\quad\to\quad\left|\overrightarrow{AE}\right|=\sqrt{\underset{\to}{u}^2+\frac{1}{4}\underset{\to}{v}^2+\frac{1}{4}\underset{\to}{w}^2}=\sqrt{a^2+a^2+\frac{1}{4}k^2a^2}=\frac{1}{2}a\sqrt{8+k^2}$$

$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\underset{\to}{u}+\underset{\to}{v}+\frac{1}{2}\underset{\to}{w}\quad\to\quad\left|\overrightarrow{AF}\right|=\sqrt{\frac{1}{4}\underset{\to}{u}^2+\underset{\to}{v}^2+\frac{1}{4}\underset{\to}{w}^2}=\sqrt{\frac{1}{4}a^2+4a^2+\frac{1}{4}k^2a^2}=\frac{1}{2}a\sqrt{17+k^2}$$

המכפלה הסקלרית של שני הוקטורים היא:

$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\left(\underset{\to}{u}+\frac{1}{2}\underset{\to}{v}+\frac{1}{2}\underset{\to}{w}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\underset{\to}{u}+\underset{\to}{v}+\frac{1}{2}\underset{\to}{w}\right)=\frac{1}{2}\underset{\to}{u}^2+\frac{1}{2}\underset{\to}{v}^2+\frac{1}{4}\underset{\to}{w}^2=$$

$$=\frac{1}{2}a^2+2a^2+\frac{1}{4}k^2a^2=\frac{1}{4}a^2\left(10+k^2\right)$$

הזווית בין שני הוקטורים (זווית $\sphericalangle EAF$) מקיימת: $\cos\left(\sphericalangle EAF\right)=\dfrac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}}{\left|\overrightarrow{AE}\right|\left|\overrightarrow{AF}\right|}$

לאחר הצבת התוצאות שהתקבלו:

$$\cos\left(\sphericalangle EAF\right)=\frac{\frac{1}{4}a^2\left(10+k^2\right)}{\frac{1}{2}a\sqrt{8+k^2}\cdot\frac{1}{2}a\sqrt{17+k^2}}=\frac{\left(10+k^2\right)}{\sqrt{8+k^2}\cdot\sqrt{17+k^2}}=\sqrt{\frac{k^4+20k^2+100}{k^4+25k^2+136}}$$

כדי לקבל את הערכים האפשריים של זווית $\sphericalangle EAF$ נציב שהי ערכי קיצון של k: $k=0$, $k=4$.

עבור $k=0$ נקבל $\sphericalangle EAF=30.96^0$.

עבור $k=4$ נקבל $\sphericalangle EAF=22.5^0$.

תשובה: $k=0$ נקבל $22.5^0\le\sphericalangle EAF\le30.96^0$.

ב. הנקודה G נמצאת על הפאה $ADD'A'$.

ג. (I) על פי הנתון ארבע הנקודות נמצאות במישור אחד לכן ווקטור הכיוון של מישור AEF שווה לווקטור הכיוון של מישור AGF.

נניח כי ווקטור הכיוון של מישור AEF הוא $\alpha_1\underset{\to}{u}+\alpha_2\underset{\to}{v}+\alpha_3\underset{\to}{w}$, מתקיים כי:

$$\begin{cases}\left(\alpha_1\underset{\to}{u}+\alpha_2\underset{\to}{v}+\alpha_3\underset{\to}{w}\right)\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \left(\alpha_1\underset{\to}{u}+\alpha_2\underset{\to}{v}+\alpha_3\underset{\to}{w}\right)\cdot\overrightarrow{AF}=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\left(\alpha_1\underset{\to}{u}+\alpha_2\underset{\to}{v}+\alpha_3\underset{\to}{w}\right)\cdot\left(\underset{\to}{u}+\frac{1}{2}\underset{\to}{v}+\frac{1}{2}\underset{\to}{w}\right)=0\\ \left(\alpha_1\underset{\to}{u}+\alpha_2\underset{\to}{v}+\alpha_3\underset{\to}{w}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\underset{\to}{u}+\underset{\to}{v}+\frac{1}{2}\underset{\to}{w}\right)=0\end{cases}$$

לאחר פתיחת המכפלה הסקלרית והצבת המודולים המתאימים, נקבל $\alpha_1=4\ ,\alpha_2=1\ ,\ \alpha_3=-\frac{12}{k^2}$

ווקטור הכיוון של מישור AEF הוא $4\underset{\to}{u}+\underset{\to}{v}-\frac{12}{k^2}\underset{\to}{w}$.

באותו אופן נביע את ווקטור הכיוון של מישור AGF.

נניח כי ווקטור הכיוון של מישור AGF הוא $\beta_1\underset{\to}{u}+\beta_2\underset{\to}{v}+\beta_3\underset{\to}{w}$, מתקיים כי:

$$\begin{cases}\left(\beta_1\underset{\to}{u}+\beta_2\underset{\to}{v}+\beta_3\underset{\to}{w}\right)\cdot\overrightarrow{AG}=0\\ \left(\beta_1\underset{\to}{u}+\beta_2\underset{\to}{v}+\beta_3\underset{\to}{w}\right)\cdot\overrightarrow{AF}=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\left(\beta_1\underset{\to}{u}+\beta_2\underset{\to}{v}+\beta_3\underset{\to}{w}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\underset{\to}{v}+t\underset{\to}{w}\right)=0\\ \left(\beta_1\underset{\to}{u}+\beta_2\underset{\to}{v}+\beta_3\underset{\to}{w}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\underset{\to}{u}+\underset{\to}{v}+\frac{1}{2}\underset{\to}{w}\right)=0\end{cases}$$

לאחר פתיחת המכפלה הסקלרית והצבת המודולים המתאימים, נקבל $\beta_1=-8+\frac{2}{t}\ ,\beta_2=1\ ,\ \beta_3=-\frac{2}{tk^2}$

מהנתון כי שני ווקטורי הכיוון זהים (ארבע הנקודות נמצאות באותו מישור) נקבל:

$$\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=m\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)$$
$$\downarrow$$
$$\left(4,1,-\frac{12}{k^2}\right)=m\left(-8+\frac{2}{t},1,-\frac{2}{tk^2}\right)$$

ולכן נקבל $t=\frac{1}{6}$.

(II) כפי שמצאנו בסעיף הקודם (ראו ווקטור הכיוון של מישור AEF), ווקטור הכיוון של מישור $AEFG$

הוא $4\underset{\to}{u}+\underset{\to}{v}-\frac{12}{k^2}\underset{\to}{w}$.

ד. נביע את הזווית בין הישרים באמצעות המכפלה הסקלרית: $\cos\beta=\frac{\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{GE}}{\left|\overrightarrow{AF}\right|\left|\overrightarrow{GE}\right|}=\frac{\left(\frac{1}{2}\underset{\to}{u}+\underset{\to}{v}+\frac{1}{2}\underset{\to}{w}\right)\cdot\left(\underset{\to}{u}+\frac{1}{3}\underset{\to}{w}\right)}{\left|\frac{1}{2}\underset{\to}{u}+\underset{\to}{v}+\frac{1}{2}\underset{\to}{w}\right|\left|\underset{\to}{u}+\frac{1}{3}\underset{\to}{w}\right|}$

לאחר הצבת המודולים המתאימים נקבל: $\cos\beta=\frac{3+k^2}{\sqrt{17+k^2}\cdot\sqrt{9+k^2}}$.

השוואה לנתון תיתן $\frac{\left(3+k^2\right)^2}{\left(17+k^2\right)\cdot\cancel{\left(9+k^2\right)}}=\frac{1}{\cancel{9+k^2}} \leftarrow k^4+5k^2-8=0$.

פתרון המשוואה הדו-ריבועית נותן $k=\sqrt{\frac{-5+\sqrt{57}}{2}}\approx1.129$

פתרון שאלה 3

סכום פתרונות המשוואה הוא $m+1$ ומכפלת פתרונות המשוואה היא $40+30i$.

הביטוי $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}$ ירשם כ- $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{z_1+z_2}{z_1z_2}$, ולאחר הצבה נקבל כי $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{m+1}{40+30i}$.

מהנתון בשאלה נקבל $\frac{m+1}{40+30i}=0.12-0.04i$.

לאחר סידור המשוואה נקבל $m=5+2i$.

נציב את $m=5+2i$ במשוואה הריבועית ונקבל: $z^2-(6+2i)z+40+30i=0$.

פתרונות המשוואה הם:

$$z_{1,2}=\frac{6+2i\pm\sqrt{(6+2i)^2-4(40+30i)}}{2}=\frac{6+2i\pm\sqrt{-128-96i}}{2}=\frac{2(3+i)\pm 4i\cdot\sqrt{8+6i}}{2}=3+i\pm 2i\sqrt{8+6i}$$

נמצא את $\sqrt{8+6i}$: $\sqrt{8+6i}=a+bi \leftarrow \begin{cases} a^2-b^2=8 \\ ab=3 \end{cases}$.

פתרון מערכת המשוואות נותן: $a=3$, $b=1$.

לכן $z_{1,2}=3+i\pm 2i(3+i)$ ונקבל: $z_1=1+7i$, $z_2=5-5i$

פתרון שאלה 4

א. (I) $f'(x)=(\ln x)^k+k\cdot(\ln x)^{k-1}=(\ln x)^{k-1}\cdot(k+\ln x)$ $\leftarrow$ $f'(1)=(\ln 1)^{k-1}\cdot(k+\ln x)=0$

(II) נבחן את $f'(x)$ מימין ומשמאל ל- $x=1$ עבור ערכים אי-זוגיים ועבור ערכים זוגיים של k.

נבחר $x_1=0.9$, $x_2=1.1$

k **אי-זוגי:** $f'(0.9)=(-0.1)^{k-1}\cdot(k-0.1)>0$, $f'(1.1)=(0.095)^{k-1}\cdot(k+0.095)>0$

לכן עבור k אי-זוגי יש ל- $f(x)$ נקודת פיתול ב- $x=1$.

k **זוגי:** $f'(0.9)=(-0.1)^{k-1}\cdot(k-0.1)<0$, $f'(1.1)=(0.095)^{k-1}\cdot(k+0.095)>0$

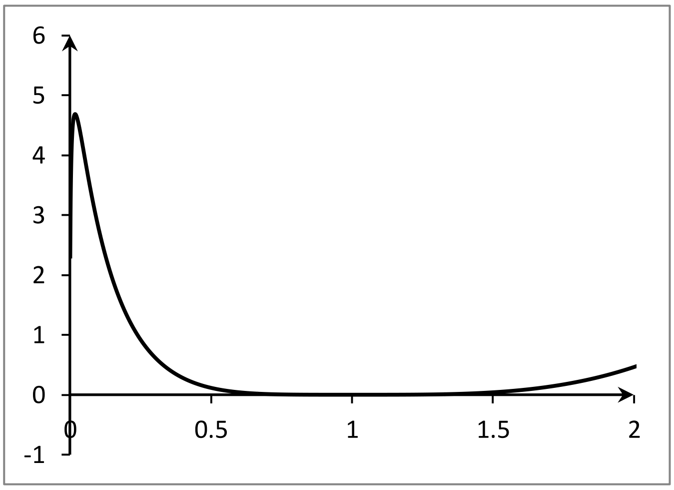
לכן עבור k זוגי יש ל- $f(x)$ נקודת מינימום ב- $x=1$.

ב. על-פי התוצאה בסעיף א' II ברור ש- k הוא מספר אי זוגי.

לפי הגרף יש ל- $f(x)$ נקודת מינימום ב- $x=0.05$ (בערך). נציב בנגזרת הפונקציה ונקבל:

$f'(0.05)=(\ln 0.05)^{k-1}\cdot(\ln 0.05+k)$. השוואת הנגזרת לאפס תיתן: $\ln 0.05+k=0$ ולכן $k=3$.

ג.



פתרון שאלה 5

א. על פי נתוני השאלה נקבל את המשוואה: $M\left(20\right)=20,000\cdot\left(\frac{100+p}{100}\right)^{10}\cdot\left(\frac{100-p}{100}\right)^{10}$

כאשר $M\left(20\right)$ הוא מספר הזאבים בשנת 2000 (10 שנים מ-1980 עד 1990 ו- 10 שנים מ-1990 עד 2000).

נציב ונקבל:

$$19,920=20,000\cdot\left(\frac{100+p}{100}\right)^{10}\cdot\left(\frac{100-p}{100}\right)^{10}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{19,920}{20,000}=\left[\left(\frac{100+p}{100}\right)\cdot\left(\frac{100-p}{100}\right)\right]^{10} \quad /\sqrt[10]{}$$

$$\downarrow$$

$$\sqrt[10]{\frac{19,920}{20,000}}=\frac{\left(100+p\right)\cdot\left(100-p\right)}{10,000}$$

$$\downarrow$$

$$9,996=10,000-p^2$$

לכן נקבל: $p=2\%$

ב. נציב $p=2\%$ ונקבל $q=0.98$.

והמשוואה היא: $M\left(t\right)=19,920\cdot0.98^t$, נציב $M\left(t\right)=14,130$ ונקבל $14,130=19,920\cdot0.98^t$.

לכן $t=\frac{\ln\left(\frac{14,130}{19,920}\right)}{\ln0.98}=17$.

תשובה: מספר הזאבים יהיה 14,130 בשנת 2017.

פתרון שאלה 1

א.

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\underset{\to}{u}+t\underset{\to}{v}$$
$$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=-\underset{\to}{u}+t\underset{\to}{w}$$

ב. נרשום $|\underset{\to}{w}|=\sqrt{3}\,a\ ,\ |\underset{\to}{v}|=\sqrt{2}\,a\ ,\ |\underset{\to}{u}|=a$

נביע את $\overrightarrow{BC}$: $\quad \left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{\underset{\to}{u}^2+\underset{\to}{v}^2-2\underset{\to}{u}\cdot\underset{\to}{v}} \ \leftarrow\ \overrightarrow{BC}=-\underset{\to}{u}+\underset{\to}{v}$

נציב $\left|\overrightarrow{BC}\right|=a$ ונקבל: $\quad \underset{\to}{u}\cdot\underset{\to}{v}=a^2 \ \leftarrow\ a=\sqrt{a^2+2a^2-2\underset{\to}{u}\cdot\underset{\to}{v}}$

נביע את $\overrightarrow{BC'}$: $\quad \left|\overrightarrow{BC'}\right|=\sqrt{\underset{\to}{u}^2+\underset{\to}{w}^2-2\underset{\to}{u}\cdot\underset{\to}{w}} \ \leftarrow\ \overrightarrow{BC'}=-\underset{\to}{u}+\underset{\to}{w}$

נציב $\left|\overrightarrow{BC'}\right|=\sqrt{2}\,a$ ונקבל: $\quad \underset{\to}{u}\cdot\underset{\to}{w}=a^2 \ \leftarrow\ \sqrt{2}\,a=\sqrt{a^2+3a^2-2\underset{\to}{u}\cdot\underset{\to}{w}}$

נביע את $\overrightarrow{CC'}$: $\quad \left|\overrightarrow{CC'}\right|=\sqrt{\underset{\to}{v}^2+\underset{\to}{w}^2-2\underset{\to}{v}\cdot\underset{\to}{w}} \ \leftarrow\ \overrightarrow{CC'}=-\underset{\to}{v}+\underset{\to}{w}$

נציב $\left|\overrightarrow{CC'}\right|=a$ ונקבל: $\quad \underset{\to}{v}\cdot\underset{\to}{w}=2a^2 \ \leftarrow\ a=\sqrt{2a^2+3a^2-2\underset{\to}{v}\cdot\underset{\to}{w}}$

תשובה: $\underset{\to}{v}\cdot\underset{\to}{w}=2a^2\ ,\ \underset{\to}{u}\cdot\underset{\to}{w}=a^2\ ,\ \underset{\to}{u}\cdot\underset{\to}{v}=a^2$

ג. נרשום $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}=\left|\overrightarrow{BE}\right|\left|\overrightarrow{BF}\right|\cos\left(\sphericalangle FBE\right) \quad (*)$

$$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}=\left(-\underset{\to}{u}+t\underset{\to}{v}\right)\cdot\left(-\underset{\to}{u}+t\underset{\to}{w}\right)=\underset{\to}{u}^2-t\underset{\to}{u}\cdot\underset{\to}{v}-t\underset{\to}{u}\cdot\underset{\to}{w}+t^2\underset{\to}{v}\cdot\underset{\to}{w}=$$
$$=a^2-ta^2-ta^2+2t^2a^2=a^2\left(2t^2-2t+1\right)$$

$$\left|\overrightarrow{BE}\right|=\sqrt{\underset{\to}{u}^2+t^2\underset{\to}{v}^2-2t\underset{\to}{u}\cdot\underset{\to}{v}}=\sqrt{a^2+2t^2a^2-2ta^2}=a\sqrt{2t^2-2t+1}$$
$$\left|\overrightarrow{BF}\right|=\sqrt{\underset{\to}{u}^2+t^2\underset{\to}{w}^2-2t\underset{\to}{u}\cdot\underset{\to}{w}}=\sqrt{a^2+3t^2a^2-2ta^2}=a\sqrt{3t^2-2t+1}$$

נציב ב - $(*)$:

$$a^2\left(2t^2-2t+1\right)=a\sqrt{2t^2-2t+1}\cdot a\sqrt{3t^2-2t+1}\cdot\cos\left(\sphericalangle FBE\right)$$
$$\downarrow$$
$$\cos\left(\sphericalangle FBE\right)=\sqrt{\frac{2t^2-2t+1}{3t^2-2t+1}}$$

ד.   (I)   הצבה של $t=\frac{1}{3}$ בתוצאת סעיף ג' תיתן: $\cos\left(\sphericalangle FBE\right)=\sqrt{\frac{\frac{2}{9}-\frac{2}{3}+1}{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}+1}}=\sqrt{\frac{5}{6}}$

לכן $\sphericalangle FBE\approx 33.6^0$

(II)   נחשב את נפח הפירמידה $BEFC$ לפי הבסיס BEC והגובה לבסיס EF.

נראה, ראשית כי $EF\perp BEC$.

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}=-\frac{1}{3}\underset{\rightarrow}{v}+\frac{1}{3}\underset{\rightarrow}{w}$$

נעזר במשפט: ישר ניצב למישור אם הוא ניצב לשני ישרים הפורשים את המישור. נראה כי $\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{BE}$

ו - $\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BE}=\left(-\frac{1}{3}\underset{\rightarrow}{v}+\frac{1}{3}\underset{\rightarrow}{w}\right)\cdot\left(-\underset{\rightarrow}{u}+\frac{1}{3}\underset{\rightarrow}{v}\right)=\frac{1}{3}\underset{\rightarrow}{v}\cdot\underset{\rightarrow}{u}-\frac{1}{9}\underset{\rightarrow}{v}^2-\frac{1}{3}\underset{\rightarrow}{u}\cdot\underset{\rightarrow}{w}+\frac{1}{9}\underset{\rightarrow}{v}\cdot\underset{\rightarrow}{w}=\frac{1}{3}a^2-\frac{2}{9}a^2-\frac{1}{3}a^2+\frac{2}{9}a^2=0$$

$$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(-\frac{1}{3}\underset{\rightarrow}{v}+\frac{1}{3}\underset{\rightarrow}{w}\right)\cdot\left(-\underset{\rightarrow}{u}+\underset{\rightarrow}{v}\right)=\frac{1}{3}\underset{\rightarrow}{v}\cdot\underset{\rightarrow}{u}-\frac{1}{3}\underset{\rightarrow}{v}^2-\frac{1}{3}\underset{\rightarrow}{u}\cdot\underset{\rightarrow}{w}+\frac{1}{3}\underset{\rightarrow}{v}\cdot\underset{\rightarrow}{w}=\frac{1}{3}a^2-\frac{2}{3}a^2-\frac{1}{3}a^2+\frac{2}{3}a^2=0$$

נחשב עתה את שטח הבסיס: $S_{BEC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{EC}\right|\cdot\sin 45^0=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{2}{3}\sqrt{2}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{3}a^2$

ואורך הגובה $\left|\overrightarrow{EF}\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\underset{\rightarrow}{v}+\frac{1}{3}\underset{\rightarrow}{w}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{9}\underset{\rightarrow}{v}^2-\frac{2}{9}\underset{\rightarrow}{v}\cdot\underset{\rightarrow}{w}+\frac{1}{9}\underset{\rightarrow}{w}^2}=\sqrt{\frac{2}{9}a^2-\frac{4}{9}a^2+\frac{3}{9}a^2}=\frac{1}{3}a$

נפח הפירמידה הוא: $V_{BEFC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}a^2\cdot\frac{1}{3}a=\frac{1}{27}a^3$

פתרון שאלה 2

א. משוואת המעגל היא $(x-1)^2+y^2=1$.

רכיב ה – X וה – Y של z_1 הם $z_{1(x)}=r_1\cos\theta_1$, $z_{1(y)}=r_1\sin\theta_1$.

נציב את הרכיבים של z_1 במשוואת המעגל ונקבל: $(r_1\cos\theta_1-1)^2+(r_1\sin\theta_1)^2=1$.

לאחר פתיחת סוגריים ושימוש בזהות $\sin^2\theta_1+\cos^2\theta_1=1$ נקבל $\cos\theta_1=\frac{1}{2}r_1$, $\sin\theta_1=\frac{1}{2}\sqrt{4-r_1^2}$.

ובהצבת הערכים של $\sin\theta_1$ ו - $\cos\theta_1$ בהצגה הטריגונומטרית של z_1 $(z_1=r_1cis\theta_1)$ נקבל:

$$z_1=r_1\cdot\frac{1}{2}r_1+r_1\cdot\frac{1}{2}\sqrt{4-r_1^2}\cdot i=\frac{1}{2}r_1\cdot\left(r_1+\sqrt{4-r_1^2}\cdot i\right)$$

באותו אופן נקבל $z_2=\frac{1}{2}r_2\cdot\left(r_2-\sqrt{4-r_2^2}\cdot i\right)$.

ב. (I) נרשום $z_3=z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2\cdot cis(\theta_1+\theta_2)$ $(*)$.

המספר z_3 נמצא על המעגל, לכן רכיבי ה – X וה – Y שלו מקיימים את משוואת המעגל. נקבל:

$$\left(r_1\cdot r_2\cdot\cos(\theta_1+\theta_2)-1\right)^2+\left(r_1\cdot r_2\cdot\sin(\theta_1+\theta_2)\right)^2=1$$

לאחר פתיחת סוגריים וסידור המשוואה, נקבל $r_1\cdot r_2=2\cdot\cos(\theta_1+\theta_2)$ ובהצבה ב - $(*)$ נקבל

$$z_3=2\cdot\cos(\theta_1+\theta_2)\cdot cis(\theta_1+\theta_2)$$

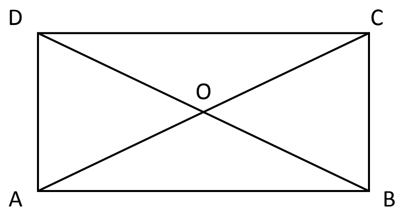
(II) מסעיף א' נקבל $\cos\theta_1=\frac{1}{2}r_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$ לכן $\theta_1=30^0$. $\cos\theta_2=\frac{1}{2}r_2=\frac{1}{2}$ לכן $\theta_2=-60^0=300^0$.

המספר z_3 נמצא על קשת המעגל בין z_1 ל - z_2 (כי הארגומנט שלו שווה לסכום הארגומנטים של z_1 ו - z_2)

המרובע $z_1z_3z_2o$ חסום במעגל לכן סכום זוויותיו הנגדיות הוא 180^0.

הזווית $\sphericalangle z_1oz_2$ היא ישרה $\left(\theta_1-\theta_2=30^0-(-60^0)=90^0\right)$ לכן $\sphericalangle z_1z_3z_2=90^0$.

פתרון שאלה 3



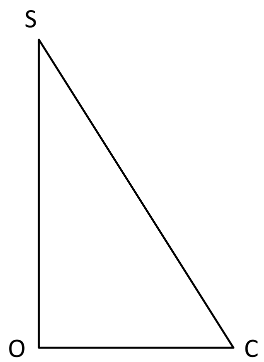
א. נתון $\tan\alpha = \frac{3}{4}$, $\left(\alpha = \sphericalangle BOC\right)$

לכן $\sphericalangle DBC = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$ ו - $\frac{DC}{BC} = \cot\frac{\alpha}{2}$.

נעזר בזהויות $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\alpha}}$, $\cot\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$

ונקבל $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{9}{16}}} = \frac{4}{5}$ לכן $\cot\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}} = 3$.

תשובה: $\frac{DC}{BC} = 3$.



ב. (I) במשולש ΔCOS , $\sphericalangle OCS = 2\alpha$, $OC = \frac{1}{2}a$ (נתון)

נקבל: $SC = \frac{\frac{1}{2}a}{\cos 2\alpha}$.

נחשב את $\cos 2\alpha$: $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot\frac{16}{25} - 1 = \frac{7}{25}$

לכן $SC = \frac{25}{14}\cdot a$.

(II) במשולש ΔCOS , ממשפט פיתגורס: $\left(SO\right)^2 = \left(SC\right)^2 - \left(CO\right)^2$

לאחר הצבת הערכים המתאימים נקבל $SO = \frac{12}{7}\cdot a$.

(III) שטח בסיס הפירמידה נתון בביטוי $S_{ABCD} = \frac{1}{2}a^2\sin\alpha$. כמו כן $\sin\alpha = \tan\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

נקבל: $V_{ABCDS} = \frac{1}{3}\cdot\left(SO\right)\cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3}\cdot\frac{12}{7}a\cdot\frac{1}{2}a^2\sin\alpha = \frac{2}{7}a^3\cdot\frac{3}{5} = \frac{6}{35}a^3$

תשובה: נפח הפירמידה הוא $V_{ABCDS} = \frac{6}{35}a^3$.

ג. נחשב את צלעות הבסיס.

$$AB=\frac{3a}{\sqrt{10}}\ ,\ BC=\frac{a}{\sqrt{10}}\ \leftarrow\ \left(3\cdot BC\right)^2+\left(BC\right)^2=a^2\ \leftarrow\ \left(AB\right)^2+\left(BC\right)^2=\left(AC\right)^2$$

במשולש ΔASB : $\cos\left(\sphericalangle BAS\right)=\frac{\frac{1}{2}AB}{AS}=\frac{\frac{3a}{2\sqrt{10}}}{\frac{25a}{14}}=\frac{21}{25\sqrt{10}}$

במשולש ΔASD : $\cos\left(\sphericalangle DAS\right)=\frac{\frac{1}{2}AD}{AS}=\frac{\frac{a}{2\sqrt{10}}}{\frac{25a}{14}}=\frac{7}{25\sqrt{10}}$

נקבל: $\sphericalangle BAS=74.6^0$, $\sphericalangle DAS=84.9^0$.

לכן $\sphericalangle SAS=110.5^0$

פתרון שאלה 4

א. תחום הערכים של הפרמטר a יקבע על ידי התנאי שלפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות קיצון.

נגזור את $f(x)$ ונשווה את נגזרתה לאפס. $f'(x)=\dfrac{(\ln x+1)\cdot(\ln x+a)-\ln x}{(\ln x+a)^2}=\dfrac{\ln^2 x+a\ln x+a}{(\ln x+a)^2}$

$f'(x)=0 \leftarrow \ln^2 x+a\ln x+a=0 \ (*)$. למשוואה הריבועית שהתקבלה יש שני פתרונות כאשר $\Delta>0$

כלומר $a^2-4a>0$.

תשובה: תחום הערכים של a הוא $a<0$ או $a>4$.

ב. מכפלת הפתרונות של $(*)$ היא a (לפי משוואות ויאטה $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$), לכן $a=-\sqrt{e}$.

ג. עבור $a=-\dfrac{1}{2}$: $f(x)=\dfrac{x\cdot\ln x}{\ln x-0.5}$

(I) תחום הגדרה: $\ln x\neq 0.5 \rightarrow x\neq\sqrt{e}$ וגם $x>0$.

(II) חיתוך ציר X: $x\cdot\ln x=0 \rightarrow \ln x=0 \rightarrow x=1$

חיתוך ציר Y: הפונקציה אינה מוגדרת עבור $x=0$.

תשובה: $(1,0)$

(III) נקודות קיצון:

מ - $(*)$ נקבל $\ln^2 x-0.5\ln x-0.5a=0$. פתרון המשוואה נותן $x_1=e$, $x_2=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

נגזור מונה בלבד של $f'(x)$ (המכנה חיובי): $f''^*(x)=\dfrac{4\ln x-1}{2x}$ ובהצבת ערכי x_1 ו - x_2 נקבל

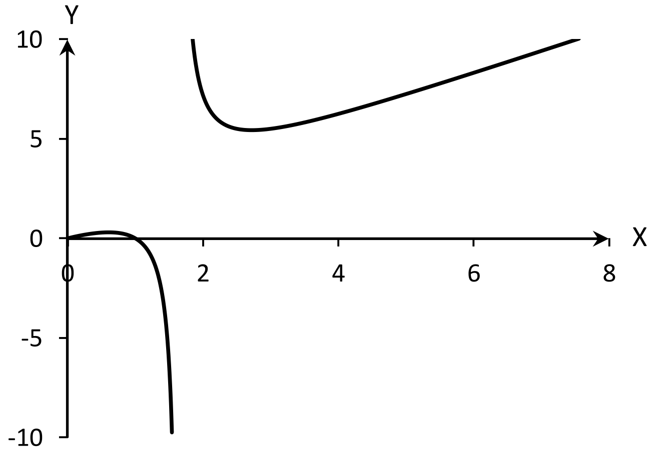
$f''(e)>0$, $f''\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)<0$. נציב את שיעורי ה – X של נקודות הקיצון ב - $f(x)$ ונקבל

$$\left(\frac{1}{\sqrt{e}},\frac{1}{2\sqrt{e}}\right)_{\max}\ ,\ (e,2e)_{\min}$$

(IV)   תחומי עלייה: $0<x<\frac{1}{\sqrt{e}}$ או $x>e$

תחומי ירידה: $\frac{1}{\sqrt{e}}<x<\sqrt{e}$ או $\sqrt{e}<x<e$

ד.



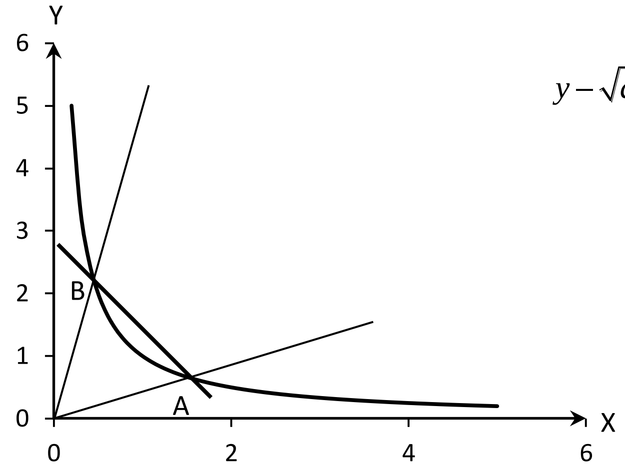
פתרון שאלה 5

א. חיתוך $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$ ו - $y=ax$: $ax=\frac{1}{x} \leftarrow x=\frac{1}{\sqrt{a}} \leftarrow y=\sqrt{a}$

חיתוך $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$ ו - $y=bx$: $bx=\frac{1}{x} \leftarrow x=\frac{1}{\sqrt{b}} \leftarrow y=\sqrt{b}$

תשובה: $A\left(\frac{1}{\sqrt{a}},\sqrt{a}\right)$, $B\left(\frac{1}{\sqrt{b}},\sqrt{b}\right)$

ב. נמצא את משוואת הישר AB.



$$m_{AB}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\frac{1}{\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{a}}}=-\sqrt{ab} \ , \ y-\sqrt{a}=-\sqrt{ab}\cdot\left(x-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

משוואת הישר AB היא: $y=-\sqrt{ab}\cdot x+\sqrt{b}+\sqrt{a}$.

השטח המוגבל בין הישר AB וגרף הפונקציה $f\left(x\right)$

נתון בביטוי:

$$S=\int_{\frac{1}{\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{a}}}\left(-\sqrt{ab}\cdot x+\sqrt{b}+\sqrt{a}-\frac{1}{x}\right)dx$$

חישוב האינטגרל ייתן (לאחר סידור): $S=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)+\ln\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{b-a}{2\sqrt{ab}}+\ln\sqrt{\frac{a}{b}}$

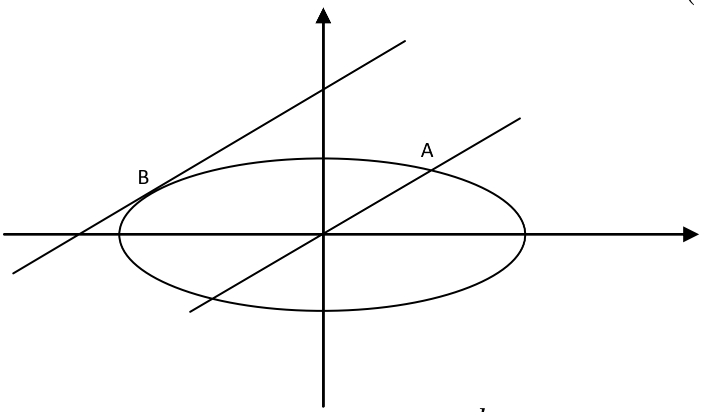
ג. נציב $\sqrt{\frac{a}{b}}=t$, $\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{1}{t}$ ונקבל: $g\left(t\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{t}-t\right)+\ln t=\frac{1-t^2}{2t}+\ln t$

ד. על פי הנתון $\frac{a}{b}=\frac{1}{4} \leftarrow t=\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{1}{2}$.

לכן: $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1-\frac{1}{4}}{2\cdot\frac{1}{2}}+\ln\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\ln\frac{1}{2}\approx 0.057$

פתרון שאלה 1

נרשום את שיעורי הנקודות A ו – B: $B(x_2, y_2)$, $A(x_1, y_1)$



נבודד את y במשוואת האליפסה: $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

נניח כי A נמצאת ברביע הראשון ו – B ברביע השני.

שיעורי הנקודה A הם: $A\left(x_1, \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_1^2}\right)$.

שיפוע המשיק לאליפסה בנקודה B (יתקבל על ידי גזירה) הוא: $m_B = -\frac{b}{a}\cdot\frac{x_2}{\sqrt{a^2 - x_2^2}}$

שיפוע הישר OA הוא $m_{OA} = \frac{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_1^2}}{x_1}$.

על פי הנתון $m_B = m_{OA}$, לכן: $-\frac{b}{a}\cdot\frac{x_2}{\sqrt{a^2 - x_2^2}} = \frac{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_1^2}}{x_1}$ $(*)$.

נבודד את x_2 מ - $(*)$ ונקבל $x_2 = -\sqrt{a^2 - x_1^2}$ וכן $y_2 = \frac{b}{a}\cdot x_1$ $\leftarrow$ $B\left(-\sqrt{a^2 - x_1^2}, \frac{b}{a}\cdot x_1\right)$.

נחשב את $(OA)^2 + (OB)^2$: $(OA)^2 + (OB)^2 = x_1^2 + \frac{b^2}{a^2}\cdot\left(a^2 - x_1^2\right) + a^2 - x_1^2 + \frac{b^2}{a^2}\cdot x_1^2$

לאחר כינוס איברים נקבל: $(OA)^2 + (OB)^2 = a^2 + b^2$.

פתרון שאלה 2

א. נרשום את משוואת המרחק בין נקודה על הישר $(3,3,-4)$ למישור:

$$\sqrt{30}=\frac{|3(k-1)-3-4(k+2)-13|}{\sqrt{(k-1)^2+1+(k+2)^2}}=\frac{|-k-27|}{\sqrt{2k^2+2k+6}}$$

לאחר העלאת שני אגפי המשוואה בחזקה שנייה נקבל: $59k^2+6k-549=0$

פתרונות המשוואה הריבועית הם $k_1=3$, $k_2=-3\frac{6}{59}$.

הישר מקביל למישור אם ורק אם וקטור הכיוון של הישר ניצב לווקטור הכיוון של האנך למישור, כלומר,

$(k+1,k,-1)\cdot(k-1,-1,k+2)=0$. נקבל את המשוואה הריבועית $k^2-2k-3=0$ שפתרונותיה הם

$k_3=3$, $k_4=-1$.

הפתרון המשותף לשני התנאים (שתי המשוואות הריבועיות שקבלנו) הוא $k=3$.

משוואת המישור היא: $\pi: 2x-y+5z-13=0$

ההצגה הפרמטרית של הישר היא: $l_1: \underset{\sim}{x}=(3,3,-4)+t\cdot(4,3,-1)$

ב. נמצא את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה $(3,3,-4)$.

ראשית נרשום את ההצגה הפרמטרית של הישר, l_3, הניצב למישור ועובר בנקודה $(3,3,-4)$.

$l_3: \underset{\sim}{x}=(3,3,-4)+s\cdot(2,-1,5)$ (הוקטור $(2,-1,5)$ הוא וקטור הכיוון הניצב למישור).

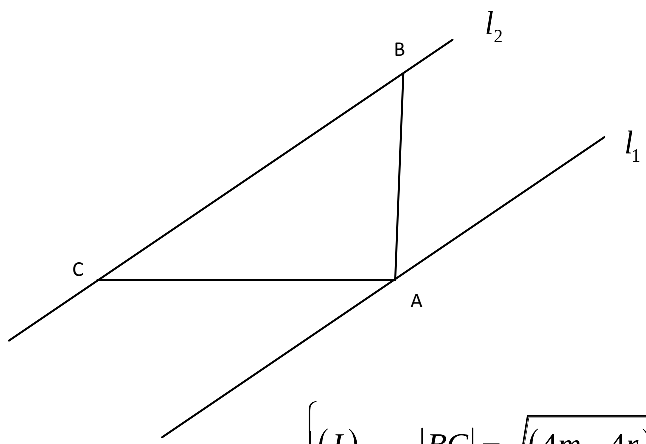
נקודת החיתוך בין הישר l_3 והמישור תתקבל על ידי הצבת ההצגה הפרמטרית של נקודה על הישר

במשוואת המישור. נקבל: $2(3+2s)-(3-s)+5(-4+5s)-13=0$

פתרון המשוואה נותן: $s=1$, ונקודת החיתוך היא $(5,2,1)$.

ההצגה הפרמטרית של l_2 היא: $l_2:(5,2,1)+r\cdot(4,3,-1)$.

ג. נניח כי שיעורי נקודות B ו – C הם:



$$B\left(5+4r,2+3r,1-r\right)$$

$$C\left(5+4m,2+3m,1-m\right)$$

צריכים להתקיים שני תנאים:

$$\begin{cases} (I) & |BC|=\sqrt{(4m-4r)^2+(3m-3r)^2+(m-r)^2}=\sqrt{\dfrac{1568}{13}} \\ (II) & \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \ \rightarrow \left(4r+2,3r-1,5-r\right)\cdot\left(4m+2,3m-1,5-m\right)=0 \end{cases}$$

נקבל:

$$\begin{cases} (I) & \sqrt{16(m-r)^2+9(m-r)^2+(m-r)^2}=\sqrt{\dfrac{1568}{13}} \\ (II) & 16rm+8m+8r+4+9rm-3m-3r+1+rm-5m-5r+25=0 \end{cases}$$

לאחר סידור המשוואות נקבל:

$$(I)\ \ m-r=\frac{28}{13}\ \ ,\ \ (II)\ \ 13rm=-15$$

פתרון שתי המשוואות נותן:

אפשרות א': $r=\frac{15}{13}$, $m=-1$ והנקודות הן: $B\left(9\frac{8}{13},5\frac{6}{13},-\frac{2}{13}\right)$, $C\left(1,-1,2\right)$

אפשרות ב': $r=1$, $m=-\frac{15}{13}$ והנקודות הן: $B\left(9,5,0\right)$, $C\left(\frac{5}{13},-1\frac{6}{13},2\frac{2}{13}\right)$

פתרון שאלה 3

א. נרשום $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$.

נקבל: $\dfrac{z-iz}{z+i\bar{z}}=\dfrac{x+iy-ix+y}{x+iy+ix+y}=\dfrac{(x+y)-i(x-y)}{(x+y)+i(x+y)}$

נכפול מונה ומכנה בצמוד של המכנה $\dfrac{z-iz}{z+i\bar{z}}=\dfrac{(x+y)-i(x-y)}{(x+y)+i(x+y)}\cdot\dfrac{(x+y)-i(x+y)}{(x+y)-i(x+y)}=\dfrac{y}{x+y}-i\cdot\dfrac{x}{x+y}$

על פי הנתון $\left|\dfrac{y}{x+y}-i\cdot\dfrac{x}{x+y}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ לכן $\left(\dfrac{y}{x+y}\right)^2+\left(\dfrac{x}{x+y}\right)^2=\dfrac{1}{2}$.

לאחר סידור המשוואה נקבל: $x-y=0$.

תשובה: משוואת המקום הגיאומטרי היא $y=x$.

ב. נמצא את מרחק הנקודה $(2,1)$ מהישר $x-y=0$.

$$d=\frac{|2-1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

תשובה: המרחק המינימאלי של המספר $z=2+i$ מהמקום הגיאומטרי הוא $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

פתרון שאלה 4

א. נגזור את $g(x)$: $g'(x)=(-\sin x-x\cos x)\cdot e^{-x\cdot\sin x}$.

לפי הנתון $g'(x_1)=0$ לכן $\sin x_1+x_1\cdot\cos x_1=0$ (הביטוי $e^{-x_1\cdot\sin x_1}$ חיובי לכל X).

חלוקה ב - $\cos x_1$ תיתן: $tgx_1+x_1=0$

ב. בסעיף א' התקבל $x_1=-tgx_1$, נמצא את $g(x_1)$: $g(x_1)=e^{-x_1\cdot\sin x_1}=e^{tgx_1\cdot\sin x_1}$

על פי הנתון $g(x_1)=0.162$ לכן $/\ln$ $e^{tgx_1\cdot\sin x_1}=0.162 \leftarrow tgx_1\cdot\sin x_1=-1.82$

נרשום $tgx_1=\frac{\sin x_1}{\cos x_1}$ ונקבל $\frac{\sin^2 x_1}{\cos x_1}=-1.82 \leftarrow \frac{1-\cos^2 x_1}{\cos x_1}=-1.82$.

נציב $\cos x_1=t$ ונקבל $t^2-1.82t-1=0$. פתרונות המשוואה הם $t_1=-0.442$, $t_2=2.262$ $(-1\le t\le 1)$.

לכן $\cos x_1=-0.442 \leftarrow x_1=2.03$

(הערה: נבדוק כי אכן הנקודה היא נקודת מינימום מקומי).

תשובה: נקודת המינימום היא $(2.03,0.162)$.

ג. (I) $f'(x)=(\sin x+x\cdot\cos x)\cdot e^{x\cdot\sin x}$.

בסעיף א' קבלנו כי $\sin x_1+x_1\cdot\cos x_1=0$ לכן $f'(x_1)=0$.

(II) $f'(x)=0 \leftarrow (\sin x+x\cdot\cos x)\cdot e^{x\cdot\sin x}=0 \leftarrow \sin x+x\cdot\cos x=0$

מהביטוי האחרון נקבל $tgx+x=0$.

בתחום $0<x<\frac{\pi}{2}$ פונקצית הטנגנס חיובית לכן אין נקודת קיצון מקומית בתחום זה.

בתחום $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ פונקצית הטנגנס שלילית ועולה לכן יש רק נקודה אחת בה מתקיים $tgx+x=0$,

נקודה זו היא $x_1=2.03$ (אותה מצאנו בסעיף ב').

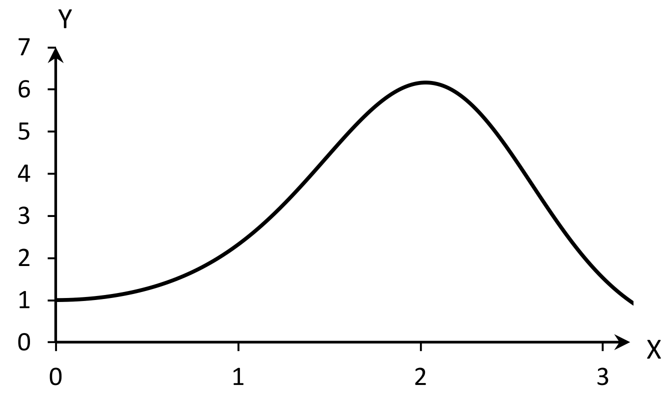
בדיקת סוג נקודת הקיצון (לפי נגזרת שנייה או באמצעות טבלה) תיתן: $(2.03,6.17)_{\max}$.

בדיקה בנקודות קצה התחום:

$f(0)=1$, $f(\pi)=1$.

תשובה: מינימום מוחלט: $(0,1),(\pi,1)$. מקסימום מקומי ומוחלט: $(2.03,6.17)_{\max}$.

(III)



פתרון שאלה 5

א. נסמן:

דבורים מזן A: $N_{0(A)}=30,000$, $a_A=0.95$.

דבורים מזן B: $N_{0(B)}=12,000$, $a_B=1.08$.

נמצא כעבור כמה שבועות יהיה מספר הדבורים משני הזנים, שווה.

$N_{0(A)}\cdot a_A^t=N_{0(B)}\cdot a_B^t$, נציב נתונים ונקבל: $30,000\cdot 0.95^t=12,000\cdot 1.08^t$.

פתרון המשוואה נותן: $\left(\frac{1.08}{0.95}\right)^t=\frac{30,000}{12,000} \leftarrow t=\frac{\ln 2.5}{\ln\left(\frac{1.08}{0.95}\right)}=7.14$ (t בשבועות).

תשובה: כמות הדבורים משני הזנים תהייה שווה אחרי 50 ימים.

ב. נרשום את הפונקציה של הכמות הכוללת של הדבורים (משני הזנים): $f(t)=N_{0(A)}\cdot a_A^t+N_{0(B)}\cdot a_B^t$

ולאחר הצבה נקבל $f(t)=30,000\cdot 0.95^t+12,000\cdot 1.08^t$. נמצא את נקודת המינימום של $f(t)$,

$f'(t)=30,000\cdot\ln 0.95\cdot 0.95^t+12,000\cdot\ln 1.08\cdot 1.08^t$. השוואת הנגזרת לאפס תיתן

$$30,000\cdot\ln 0.95\cdot 0.95^t+12,000\cdot\ln 1.08\cdot 1.08^t=0 \leftarrow \left(\frac{1.08}{0.95}\right)^t=-\frac{2.5\cdot\ln 0.95}{\ln 1.08} \leftarrow t=\frac{\ln\left(-\frac{2.5\cdot\ln 0.95}{\ln 1.08}\right)}{\ln\left(\frac{1.08}{0.95}\right)}$$

ונקבל $t=4$

נמצא את הכמות המינימלית: $f(4)=40,760$.

תשובה: הכמות המינימלית של דבורים תתקבל כעבור 4 שבועות והיא תהייה 40,760 דבורים.

פתרון שאלה 1

א. שיפוע הישר AB המשיק לאליפסה בנקודה E הוא $m_{AB}=-1$. נמצא את הנקודה על האליפסה בה השיפוע הוא 1-.

נחלץ את Y: $y=\pm\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+a^2}$, נגזור ונשווה ל – 1-. $y'=\frac{-x}{4\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+a^2}} \leftarrow \frac{-x}{4\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+a^2}}=-1$

פתרון המשוואה הוא $x=\pm\frac{4a}{\sqrt{5}}$ וזהו שיעור ה – X של נקודה E ושיעור ה – X של נקודה G בהתאמה.

ב. נציב x_1 במשוואת האליפסה ונקבל את שיעורי נקודה E: $E\left(x_1,\frac{1}{4}x_1\right)$

משוואת הישר AB: $y-\frac{1}{4}x_1=-1\cdot(x-x_1) \leftarrow y=-x+\frac{5}{4}x_1$. נקודה B היא: $B\left(0,\frac{5}{4}x_1\right)$.

ג. שטח הריבוע: $S_{ABCD}=2\cdot\left(\frac{5}{4}x_1\right)^2=\frac{25}{8}x_1^2$

שטח המלבן: $S_{EFGH}=4\cdot x_1\cdot\frac{1}{4}x_1=x_1^2$

ונקבל: $\frac{S_{ABCD}}{S_{EFGH}}=\frac{25}{8}$.

ד. מסעיף ג' נקבל: $S_{ABCD}=\frac{25}{8}x_1^2=64 \leftarrow x_1^2=\frac{512}{25}$

נציב בפתרון שהתקבל בסעיף א' $\left(x_1^2=\frac{16a^2}{5}\right)$ ונקבל: $a^2=\frac{32}{5}$.

פתרון שאלה 2

א. נרשום $z=a+bi$, $\bar{z}=a-bi$. נביע באמצעות a ו - b את $|z|$, $|z-\bar{z}|$, $|z+\bar{z}|$.

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$
$$z+\bar{z}=2a \rightarrow |z+\bar{z}|=2a$$
$$z-\bar{z}=2bi \rightarrow |z-\bar{z}|=2b$$

(I) $w=\frac{2z}{z+\bar{z}}=\frac{2(a+bi)}{2a}=1+\frac{b}{a}i$ לכן: $\frac{1}{2}\cdot|w|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2a}=\frac{|z|}{|z+\bar{z}|}$

(II) $q=\frac{2\cdot z}{z-\bar{z}}=\frac{2\cdot(a+bi)}{2bi}=1+\frac{a}{bi}=1-\frac{a}{b}i$ לכן: $\frac{1}{2}\cdot|q|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2b}=\frac{|z|}{|z-\bar{z}|}$

ב. נציב במשוואה $m^2+|w|\cdot|q|\cdot m+1=0$ את: $|w|=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$, $|q|=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$ ונקבל

$m^2+\frac{a^2+b^2}{ab}\cdot m+1=0$. נפתור בעזרת נוסחת השורשים.

$$m_{1,2}=\frac{-\frac{a^2+b^2}{ab}\pm\sqrt{\frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{a^2b^2}-4}}{2}=\frac{-\frac{a^2+b^2}{ab}\pm\sqrt{\frac{a^4+2a^2b^2+b^4-4a^2b^2}{a^2b^2}}}{2}=\frac{-\frac{a^2+b^2}{ab}\pm\sqrt{\frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{a^2b^2}}}{2}=\frac{-\frac{a^2+b^2}{ab}\pm\frac{a^2-b^2}{ab}}{2}$$

והפתרונות הם: $m_1=-\frac{b}{a}$, $m_2=-\frac{a}{b}$.

פתרון שאלה 3

א. התנאי $EF \parallel BC$ אינו הכרחי כי לא ניתן לחסום משולש שווה צלעות במשולש שווה שוקיים (כך שאחד מקודקודי המשולש שווה הצלעות מונח על אמצע הבסיס של המשולש שווה השוקיים), אלא אם מתקיים התנאי לעיל.

ב. היחס בין נפח הפירמידות שווה ליחס בין שטחי המשולשים, כלומר: $\frac{V_{ABCS}}{V_{DEFS}} = \frac{S_{ABC}}{S_{DEF}}$ (לשתי הפירמידות גובה זהה.

נסמן $DC = x$ ונקבל: $S_{ABC} = \frac{x^2}{\tan\alpha}$.

נביע את אורך הצלע של המשולש החסום באמצעות x: $DF = \frac{x \cdot \cos\alpha}{\sin\left(30^0 + \alpha\right)}$.

לכן: $S_{DEF} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x \cdot \cos\alpha}{\sin\left(30^0 + \alpha\right)}\right)^2 \cdot \sin 60^0$.

ונקבל:
$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \frac{8 \cdot \sin^2\left(30^0 + \alpha\right)}{\sqrt{3} \cdot \sin 2\alpha}$$

פתרון שאלה 4

א. אם לפונקציה $h(x)$ יש נקודת קיצון, הרי שצריך להתקיים $h'(x)=0$, אבל אז $g(x)$ אינה מוגדרת

דבר זה סותר את הנתון כי $g(x)$ מוגדרת לכל x.

ב. גזירת $f(x)$ תיתן: $f'(x)=\frac{h'(x)}{h(x)}$ $\leftarrow$ $h'(x)=h(x)\cdot f'(x)$.

נציב ב - $g(x)$ ונקבל:

$$g(x)=\ln\left[h'(x)\right]=\ln\left[h(x)\cdot f'(x)\right]=\ln\left[h(x)\right]+\ln\left[f'(x)\right]=f(x)+\ln\left[f'(x)\right]$$

ג. מסעיף ב' ומהעובדה כי $h'(x)>h(x)>0$ ניתן לראות כי $\ln\left[f'(x)\right]=\ln\left[\frac{h'(x)}{h(x)}\right]>0$

לכן $g(x)=f(x)+p(x)$, $\left(p(x)>0\right)$, כלומר $g(x)>f(x)$ לכל X.

תשובה: גרף א' מתאר את $f(x)$ וגרף ב' מתאר את $g(x)$.

ד. $g(x)=\ln\left[h'(x)\right]=\ln\left(e^{x}+ae^{ax}\right)$

עבור $x=0$ נקבל $g(0)=\ln(1+a)$.

לפי גרף ב': $g(0)\approx1.6$ לכן $\ln(1+a)\approx1.6$ $\leftarrow$ $a\approx e^{1.6}-1$

תשובה: $a=4$

פתרון שאלה 5

א. חיתוך ציר Y: $f\left(0\right)=0$.

חיתוך ציר X: $\cos x\cdot\left(e^{\sin x}-1\right)=0$

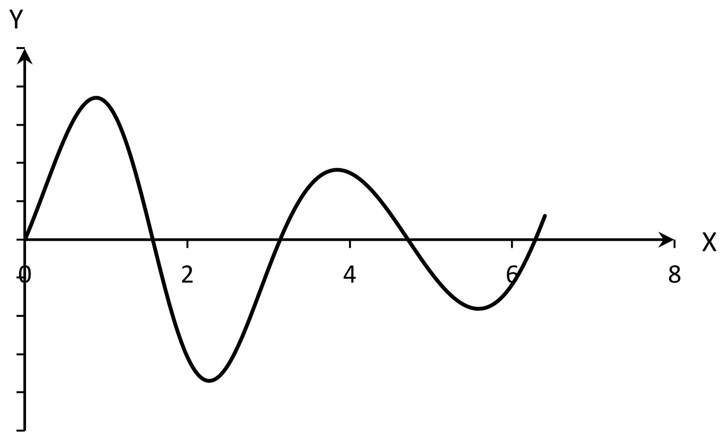
$\cos x=0 \leftarrow x_1=\frac{\pi}{2}\ ,\ x_2=\frac{3\pi}{2}$

$e^{\sin x}=1 \leftarrow \sin x=0 \leftarrow x_3=0\ ,\ x_4=\pi\ ,\ x_5=2\pi$

תשובה: $\left(2\pi,0\right),\ \left(\frac{3\pi}{2},0\right),\ \left(\pi,0\right),\ \left(\frac{\pi}{2},0\right),\ \left(0,0\right)$.

ב. נבדוק את ערך הפונקציה ב - $x=\frac{\pi}{4}$: $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\left(e^{\sin\frac{\pi}{4}}-1\right)\approx 0.727$. על פי הנתון יש ל - $f\left(x\right)$

נקודות קיצון בין כל שתי נקודות חיתוך עם ציר ה – X.



ג. נגזור את $g\left(x\right)$: $g'\left(x\right)=\cos x\cdot e^{\sin x}-\cos x=\cos x\cdot\left(e^{\sin x}-1\right)$

לכן $g'\left(x\right)-f\left(x\right)=0$.

ד. מסעיף ג' ניתן לראות כי $\int f\left(x\right)dx = g\left(x\right)+c$.

נחשב את השטח המוגבל בין הגרף של $f\left(x\right)$ וציר ה – x תוך התייחסות לשטחים מעל ומתחת לציר, נקבל:

$$S=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f\left(x\right)dx+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(x\right)dx-\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f\left(x\right)dx = g\left(x\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}-g\left(x\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+g\left(x\right)\Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}-g\left(x\right)\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}=$$

$$=g\left(\tfrac{\pi}{2}\right)-g\left(0\right)-g\left(\pi\right)+g\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+g\left(\tfrac{3\pi}{2}\right)-g\left(\pi\right)-g\left(2\pi\right)+g\left(\tfrac{3\pi}{2}\right)=$$

$$=2g\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+2g\left(\tfrac{3\pi}{2}\right)-2g\left(\pi\right)-g\left(0\right)-g\left(2\pi\right)$$

לאחר הצבה נקבל: $S=2e+\dfrac{2}{e}-4\approx 2.17$

פתרון שאלה 1

א. נמצא את משוואת המישור: $\begin{cases} I) & -a+2c=0 \\ II) & 3b-c=0 \end{cases} \leftarrow \begin{cases} I) & (a,b,c)\cdot(-1,0,2)=0 \\ II) & (a,b,c)\cdot(0,3,-1)=0 \end{cases}$

נקבל: $c=3$, $b=1$, $a=6$. $6x+y+3z+d=0$

נציב את הנקודה $(5,-2,1)$ במשוואת המישור ונקבל $d=-31$.

משוואת המישור היא: $6x+y+3z-31=0$

מציאת קודקוד A:

נציב את שיעורי קודקוד A במשוואת המישור: $6a+2a+3(2a+1)-31=0 \rightarrow a=2$

קודקוד A הוא $A(2,4,5)$

מציאת קודקוד C:

שיעור ה – X של נקודה על המישור הוא $x=5-t$. על פי הנתון $x_c=-2$ לכן $5-t=-2 \rightarrow t=7$.

נרשום הצגה פרמטרית של נקודות המישור, כאשר $t=7$: $(x,y,z)=(-2,-2+3s,15-s)$.

נמצא את אורך האלכסון AC: $(AC)^2=(2+2)^2+(6-3s)^2+(-10+s)^2=10s^2-56s+152$

האלכסון AC הוא אלכסון בריבוע ששטחו 88 לכן $(AC)^2=176$ ונקבל את המשוואה הריבועית

$10s^2-56s-24=0$. פתרונות המשוואה הם $s_1=6$, $s_2=-\frac{2}{5}$.

שיעורי קודקוד C הם מספרים שלמים, לכן: $C(-2,16,9)$.

ב. (I) אמצע האלכסון AC: $F\left(\frac{2-2}{2},\frac{4+16}{2},\frac{5+9}{2}\right)=(0,10,7)$

וקטור הכיוון $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AC}=(-4,12,4)=(-1,3,1)$

וקטור הכיוון של האלכסון BD (e,f,g) ניצב לווקטור הכיוון של המישור ולווקטור הכיוון של האלכסון AC, לכן:

$$\begin{cases} I) & (e,f,g)\cdot(6,1,3)=0 \\ II) & (e,f,g)\cdot(-1,3,1)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I) & 6e+f+3g=0 \\ II) & -e+3f+g=0 \end{cases}$$

פתרון מערכת המשוואות נותן: $e=8$, $f=9$, $g=-19$.

ההצגה הפרמטרית של האלכסון BD היא: $\overrightarrow{BD}: \underset{\to}{x}=(0,10,7)+r\cdot(8,9,-19)$.

(II) הישר המבוקש הוא הישר EF והצגתו הפרמטרית היא: $\overrightarrow{EF}: \underset{\to}{x}=(0,10,7)+k\cdot(6,1,3)$

ג. (I) נרשום את שיעורי קודקוד הפירמידה: $E(6k,10+k,7+3k)$. גובה הפירמידה הוא EF

ואורכו נתון בביטוי: $|EF|=\sqrt{(6k)^2+k^2+(3k)^2}=\pm\sqrt{46}\cdot k$.

נפח הפירמידה הוא $V_{ABCDE}=\frac{1}{3}\cdot|EF|\cdot S_{ABCD}$, נציב את הנתונים ונקבל: ε $\cdot 6k\sqrt{46}\cdot\frac{1}{3}\pm=\frac{176}{3}\cdot\sqrt{46}$

חילוץ k נותן $k=\pm 2$.

תשובה: $E(12,12,13)$ או: $E(-12,8,1)$

(II) משולש ΔBED הוא שווה שוקיים. בסיס המשולש הוא אלכסון בסיס הפירמידה (BD)

והגובה לבסיס במשולש הוא גובה הפירמידה (EF) .

נקבל: $\sqrt{\frac{11}{46}}=\frac{\sqrt{44}}{2\sqrt{46}}=\frac{\frac{1}{2}|BD|}{|EF|}=tg\left(\frac{1}{2}\sphericalangle BED\right)$ ו - $\frac{1}{2}\sphericalangle BED=26.06^0$.

תשובה: $\sphericalangle BED=52.12^0$.

פתרון שאלה 2

א. המספרים z_1 ו - z_3 הם קצות קוטר של מעגל אשר המספרים z_2 ו - $\overline{z_2}$ נמצאים עליו.

מרכז המעגל נמצא על הישר $y = a \cdot x$. נניח כי מרכז המעגל הוא בנקודה $M\left(x_M, a \cdot x_M\right)$,

מרחק המספר z_2 ממרכז המעגל שווה למרחק המספר $\overline{z_2}$ ממרכז המעגל.

נרשום $z_2 = x_2 + y_2 \cdot i$, $\overline{z_2} = x_2 - y_2 \cdot i$.

נקבל: $\left(x_2 - x_M\right)^2 + \left(y_2 - a \cdot x_M\right)^2 = \left(x_2 - x_M\right)^2 + \left(-y_2 - a \cdot x_M\right)^2$

פתרון המשוואה נותן $x_M = 0$ ($y_2 \neq 0$ כי z_2 מספר מרוכב), לכן מרכז המעגל בראשית הצירים.

תשובה: משוואת המקום הגיאומטרי היא $x^2 + y^2 = r^2$ (כאשר $r = |z_1| = |z_3| = |z_2|$).

ב. נרשום $z_1 = x_1 + ax_1 i$. כמו כן

$$z_3 = z_1 \cdot q^2 = z_1 \cdot i^1 = -z_1 = -x_1 - ax_1 i$$
$$z_2 = z_1 \cdot q = z_1 \cdot i = -ax_1 + x_1 i$$
$$\overline{z_2} = -ax_1 - x_1 i$$

נביע את אורכי הניצבים במשולש $\Delta z_1 z_2 z_3$:

$$|z_1 z_2| = \sqrt{\left(x_1 + ax_1\right)^2 + \left(ax_1 - x_1\right)^2} = x_1 \cdot \sqrt{2 \cdot \left(a^2 + 1\right)}$$
$$|z_3 z_2| = \sqrt{\left(x_1 - ax_1\right)^2 + \left(x_1 + ax_1\right)^2} = x_1 \cdot \sqrt{2 \cdot \left(a^2 + 1\right)}$$

שטח משולש $\Delta z_1 z_2 z_3$ הוא: $S_{\Delta z_1 z_2 z_3} = \frac{1}{2} \cdot |z_1 z_2| \cdot |z_3 z_2| = x_1^2 \cdot \left(a^2 + 1\right)$

נביע את אורכי הניצבים במשולש $\Delta z_1 \overline{z_2} z_3$:

$$\left|z_1 \overline{z_2}\right| = \sqrt{\left(x_1 + ax_1\right)^2 + \left(ax_1 + x_1\right)^2} = \sqrt{2} \cdot x_1 \cdot (a + 1)$$
$$\left|z_3 \overline{z_2}\right| = \sqrt{\left(x_1 - ax_1\right)^2 + \left(x_1 - ax_1\right)^2} = \sqrt{2} \cdot x_1 \cdot (1 - a)$$

שטח משולש $\Delta z_1 \overline{z_2} z_3$ הוא: $S_{\Delta z_1 \overline{z_2} z_3} = \frac{1}{2} \cdot \left|z_1 \overline{z_2}\right| \cdot \left|z_3 \overline{z_2}\right| = x_1^2 \cdot \left(1 - a^2\right)$

נשווה לנתון בשאלה ונקבל:

$$\begin{cases} I) \quad S_{\Delta z_1 z_2 z_3} = x_1^2 \cdot \left(a^2+1\right) = 42.25 \\ II) \quad S_{\Delta z_1 \overline{z_2} z_3} = x_1^2 \cdot \left(1-a^2\right) = 30 \end{cases}$$

חלוקת המשוואות זו בזו תיתן $\frac{a^2+1}{1-a^2} = \frac{42.25}{30}$ ונקבל $a = \pm\frac{7}{17}$.

הצבה של a^2 באחת המשוואות תיתן $x_1 = \pm\frac{17}{\sqrt{8}}$.

תשובה:

אפשרות א': $z_1 = \frac{17}{\sqrt{8}} + \frac{7}{\sqrt{8}}i \quad , \quad z_2 = -\frac{7}{\sqrt{8}} + \frac{17}{\sqrt{8}}i \quad , \quad z_3 = -\frac{17}{\sqrt{8}} - \frac{7}{\sqrt{8}}i$

אפשרות ב': $z_1 = -\frac{17}{\sqrt{8}} - \frac{7}{\sqrt{8}}i \quad , \quad z_2 = \frac{7}{\sqrt{8}} - \frac{17}{\sqrt{8}}i \quad , \quad z_3 = \frac{17}{\sqrt{8}} + \frac{7}{\sqrt{8}}i$

פתרון שאלה 3

א. נסמן את צלע בסיס הפירמידה ב - a. CE הוא התיכון לצלע AB ואורכו $CE=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

נסמן ב – F את מרכז המעגל החוסם את משולש ΔABC, נקודה זו היא גם מפגש התיכונים של המשולש

(המשולש שווה צלעות). לכן $CF=\frac{2}{3}\cdot CE=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot a$.

במשולש ΔCFS מתקיים $\frac{CF}{CS}=\cos\alpha$ ← $CF=b\cdot\cos\alpha$ ונקבל, לאחר הצבה של $CF=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot a$

$a=\sqrt{3}\cdot b\cdot\cos\alpha$.

במשולש ΔCDE אשר בו $\sphericalangle CDE=90^0$ (נתון), מתקיים $\frac{DE}{CE}=\sin\alpha$ ← $DE=CE\cdot\sin\alpha$.

לאחר הצבה נקבל: $DE=\frac{3}{4}\cdot b\cdot\sin 2\alpha$. נחשב עתה את שטח משולש ΔABD:

$$S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}\cdot DE\cdot AB=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot b\cdot\sin 2\alpha\cdot\sqrt{3}\cdot b\cdot\cos\alpha=\frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot b^2\cdot\cos\alpha\cdot\sin 2\alpha$$

ב. על פי הנתון אפשר לראות כי $V_{ABCS}=2\cdot V_{ABCD}$.

לשתי הפירמידות בסיס שווה, ΔABC, לכן גובה הפירמידה $ABCS$ כפול מגובה הפירמידה $ABCD$.

הגובה מקודקוד D של פירמידה $ABCD$ חותך את מישור הבסיס בנקודה G, במשולש ΔDGE

מתקיים $\frac{DG}{DE}=\cos\alpha$ לכן $DG=DE\cdot\cos\alpha$. נציב את ערכו של DE שמצאנו בסעיף א' ונקבל:

$DG=\frac{3}{4}\cdot b\cdot\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha$.

גובה הפירמידה $ABCS$ מקיים $\frac{SF}{SA}=\sin\alpha$, לכן $SF=b\cdot\sin\alpha$.

נחלק את שני גבהי הפירמידות זה בזה ונשווה ל – 2, נקבל: $\frac{SF}{DG}=\frac{b\cdot\sin\alpha}{\frac{3}{4}\cdot b\cdot\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha}=2$

פתרון המשוואה נותן $\alpha=54.74^0$.

פתרון שאלה 4

א. (I) פעולת $\ln$ על שני אגפי הפונקציה תיתן $\ln\left[f(x)\right]=\ln\left(x^x\right)=x\cdot\ln x$

(II) גזירת שני האגפים תיתן $\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln x+1$. נכפול ב - $f(x)$ ונציב לאחר מכן $f(x)=x^x$

ונקבל $f'(x)=f(x)\cdot(1+\ln x)=x^x\cdot(\ln x+1)$.

ב. (I) נציב $g(x)=0$, $x^x\cdot(1+\ln x)=0$. הביטוי x^x שונה מאפס לכן נמצא את הפתרון

ל - $1+\ln x=0$ נקבל $x=\frac{1}{e}$

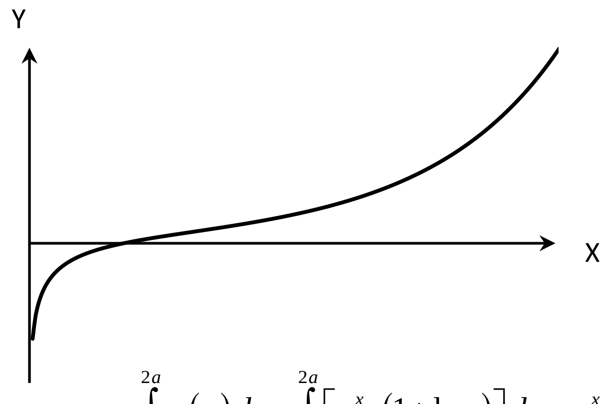
תשובה: $\left(\frac{1}{e},0\right)$

(II) נראה כי $g'(x)>0$ לכל X.

$$g'(x)=x^x\cdot(1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\cdot x^x=x^x\cdot\left[(1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right]$$

כל גורמי המכפלה חיוביים לכן $g'(x)>0$ והפונקציה $g(x)$ עולה לכל X בתחום הגדרתה.

(III)



ג. $\int_a^{2a} g(x)\,dx=\int_a^{2a}\left[x^x\cdot(1+\ln x)\right]dx=x^x\Big|_a^{2a}=(2a)^{2a}-a^a$.

נשווה לאפס נעביר אגפים ונפעיל $\ln$ על שני האגפים, נקבל: $\ln\left[(2a)^{2a}\right]=\ln\left(a^a\right)$.

פתרון המשוואה נותן $a=\frac{1}{4}$

פתרון שאלה 5

א. נרשום $a_A = 1 + 0.01 \cdot P$, $a_B = 1 + 0.02 \cdot P$, כאשר a_A ו - a_B מייצגים את גורמי הגידול של מזון מסוג A

ושמירה על טמפרטורה של $30^0 C$ בהתאמה.

משקל הדגים אחרי חודשיים של האכלה בסוג מזון A: $N(2) = N_0 \cdot {a_A}^2$

משקל הדגים אחרי חודשיים (נוספים) של שמירת טמפרטורה: $N(4) = N(2) \cdot {a_B}^2 = N_0 \cdot {a_A}^2 \cdot {a_B}^2$.

לאחר הצבת הנתונים תתקבל המשוואה: $10,093 = 8,000 \cdot (1 + 0.01P)^2 \cdot (1 + 0.02P)^2$

סידור המשוואה ייתן (אחרי הוצאת שורש ריבועי): $(1 + 0.01P) \cdot (1 + 0.02P) = 1.12322$.

פתרון המשוואה הוא: $P = 4\%$.

ב. נציב $N_0 = 10,093$, $N(2) = 11,991$ ונמצא את גורם הגידול.

$11,991 = 10,093 \cdot a^2 \leftarrow a = 1.09$, כלומר, אחוז הגידול החודשי במשקל הדגים הוא 9% והוא

קטן מההשפעה המשולבת $(3P = 12\%)$.

פתרון שאלה 1

א. נשווה בין הישרים, נקבל $m \cdot x = m^2 + 3 \leftarrow x = \frac{m^2+3}{m}$ $(*)$.

כמו כן $y = m^2 + 3 \leftarrow m = \sqrt{y-3}$. נציב ב - $(*)$ ונקבל $x = \frac{\left(\sqrt{y-3}\right)^2 + 3}{\sqrt{y-3}} = \frac{y}{\sqrt{y-3}}$.

כדי לקבל את y כתלות ב - x נעלה את שני האגפים בריבוע, נקבל:

$$x^2 = \frac{y^2}{y-3} \leftarrow y^2 - x^2 y + 3x^2 = 0 .$$

נפתור את המשוואה הריבועית (נתייחס ל – X כאל פרמטר), נקבל: $y = \frac{x^2 \pm \sqrt{x^4 - 12x^2}}{2}$ ולאחר סידור

נקבל: $y = \frac{1}{2} x \cdot \left(x \pm \sqrt{x^2 - 12}\right)$.

תשובה: $x = \frac{y}{\sqrt{y-3}}$ או $y = \frac{1}{2} x \cdot \left(x \pm \sqrt{x^2 - 12}\right)$.

הערה: נזכור כי מקום גיאומטרי לא חייב לקיים את הכלל שלכל איבר בתחום קיים איבר יחיד בטווח.

ב. הנקודה על גרף המקום הגיאומטרי הקרובה ביותר לציר ה – Y היא הנקודה בה שיעור ה – X הוא הקטן ביותר. מהמשוואה $y = \frac{1}{2} x \cdot \left(x \pm \sqrt{x^2 - 12}\right)$ ניתן לראות כי הערך המינימאלי של X הוא $x = \sqrt{12}$

ולאחר הצבה נקבל $y = 6$.

תשובה: הנקודה על גרף המקום הגיאומטרי הקרובה ביותר לציר ה – Y היא הנקודה $\left(\sqrt{12}, 6\right)$.

הערה: ניתן לקבל תשובה זו גם על ידי גזירת המשוואה $x = \frac{y}{\sqrt{y-3}}$.

<u>פתרון שאלה 2</u>

א. שני הישרים אינם מקבילים כי וקטורי הכיוון של האחד אינו שווה לכפולה בסקלר של השני.

נבדוק האם יש לישרים נקודה משותפת: $\begin{cases} I) & 1+3t=-5-2s \\ II) & 2-t=2s \\ III) & -5+t=3+s \end{cases} \quad \xrightarrow{(I)+(II)} \quad t=-4 \rightarrow s=3$

הצבה במשוואה (III) תיתן פסוק שיקרי, לכן הישרים מצטלבים.

ב. נמצא ראשית את וקטור הכיוון הניצב לשני הישרים:

$$\begin{cases} (A,B,C)\cdot(3,-1,1)=0 \\ (A,B,C)\cdot(-2,2,1)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3A-B+C=0 \\ -2A+2B+C=0 \end{cases} \rightarrow A=3, B=5, C=-4$$

קבלנו כי הווקטור $\underset{\sim}{u}=(3,5,-4)$ ניצב לשני הישרים.

כדי למצוא את ההצגה הפרמטרית של l_3 נרשום את ההצגה הפרמטרית של ווקטור הכיוון מנקודה כלשהי

על l_1 לנקודה כלשהי על l_2 ונשווה אותו ל - $k\underset{\sim}{u}$ (k פרמטר). נקבל:

$$\begin{cases} 1+3t-(-5-2s)=3k \\ 2-t-2s=5k \\ -5+t-(3+s)=-4k \end{cases}$$

פתרון מערכת המשוואות נותן: $k=-1.2,\ s=-2.4,\ t=0.8$.

נציב $s=-2.4$ בהצגה הפרמטרית של l_2 ונקבל את הנקודה $(-0.2,-4.8,0.6)$.

ההצגה הפרמטרית של l_3 היא: $l_3: \underset{\sim}{x}=(-0.2,-4.8,0.6)+m\cdot(3,5,-4)$.

ג. (I) נבחר שני וקטורי כיוון של מישור π: וקטור ראשון הוא וקטור הכיוון של l_3 $(3,5,-4)$ והוקטור

השני הוא וקטור הכיוון מראשית הצירים לנקודה $(-0.2,-4.8,0.6)$, למען הנוחות נכפול וקטור זה

פי 5- $(1,24,-3)$.

נמצא עתה את וקטור הכיוון של מישור π :

$$\begin{cases}(a,b,c)\cdot(3,5,-4)=0\\(a,b,c)\cdot(1,24,-3)=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}3a+5b-4c=0\\a+24b-3c=0\end{cases}\rightarrow a=81, b=5, c=67$$

מישור π עובר בראשית הצירים, לכן משוואת המישור היא $\pi:81x+5y+67z=0$.

(II)   נמצא את הזווית בין וקטור הכיוון של l_1 ווקטור הכיוון של מישור π .

$$\cos\alpha=\frac{(3,-1,1)\cdot(81,5,67)}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{11,075}}=\frac{305}{\sqrt{121,825}}\approx 0.874$$

ונקבל $\alpha=29.1^0$.

הזווית בין הישר למישור היא המשלימה לזווית ישרה, כלומר 60.9^0 .

פתרון שאלה 3

א. המספרים $z_1, z_2, w\cdot z_3$ הם שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית לכן מתקיים $w\cdot z_3\cdot z_1=z_2^2$.

כלומר: $w\cdot rcis\theta_3\cdot rcis\theta_1=r^2\left(cis\theta_2\right)^2$.

לאחר צמצום נקבל

$$w\cdot cis\theta_3\cdot cis\theta_1=\left(cis\theta_2\right)^2$$
$$\downarrow$$
$$w\cdot cis\left(\theta_1+\theta_3\right)=cis\left(2\theta_2\right)$$
$$\downarrow$$
$$w=\frac{cis\left(2\theta_2\right)}{cis\left(\theta_1+\theta_3\right)}=cis\left(2\theta_2-\theta_1-\theta_3\right)$$

ב. המספרים $z_1, z_2, w\cdot z_3$ הם גם שלושה איברים עוקבים בסדרה חשבונית לכן מתקיים (בנוסף)

$w\cdot z_3+z_1=2z_2$. כלומר: $w\cdot rcis\theta_3+rcis\theta_2=2rcis\theta_2$.

לאחר צמצום נקבל $w\cdot cis\theta_3+cis\theta_1=2cis\theta_2$.

נציב את w שהתקבל בסעיף א' ונקבל:

$$cis\left(2\theta_2-\theta_1-\theta_3\right)\cdot cis\theta_3+cis\theta_1=2cis\theta_2$$
$$\downarrow$$
$$cis\left(2\theta_2-\theta_1\right)+cis\theta_1=2cis\theta_2\quad /\div cis\theta_2$$
$$\downarrow$$
$$\frac{cis\left(2\theta_2-\theta_1\right)}{cis\theta_2}+\frac{cis\theta_1}{cis\theta_2}=2$$
$$\downarrow$$
$$cis\left(\theta_2-\theta_1\right)+cis\left(\theta_1-\theta_2\right)=2$$

נעזר בזהות $cis\alpha+cis\left(-\alpha\right)=2\cos\alpha$ ונקבל: $\cos\left(\theta_2-\theta_1\right)=1$ ולכן $\theta_1=\theta_2$.

פתרון שאלה 4

א. הפונקציה $f(x)=\ln(\sin x)$: הפונקציה מוגדרת רק כאשר $\sin x>0$ כלומר $2\pi k<x<\pi+2\pi k$

הפונקציה $g(x)=\sin(\ln x)$: הפונקציה מוגדרת כאשר $\ln x$ מוגדר, כלומר: $x>0$.

ב. הפונקציה $f(x)=\ln(\sin x)$ שלילית לכל X.

תשובה: גרף א' מייצג את $f(x)$, גרף ב' מייצג את $g(x)$.

ג. (I) $f'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$. נשווה לאפס ונקבל: $\cos x=0$ $\leftarrow$ $x=\frac{\pi}{2}$. שיעור ה – Y בנקודה

הוא $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ln 1=0$. הנגזרת השנייה היא $f''(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}$ $\leftarrow$ $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$, נקודת מקסימום.

תשובה: $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$

(II) $g'(x)=\frac{\cos(\ln x)}{x}$. נשווה לאפס ונקבל: $\cos(\ln x)=0$ $\leftarrow$ $\ln x=\frac{\pi}{2}+\pi\cdot k$ $\leftarrow$ $x=e^{\frac{\pi}{2}+\pi k}$.

הנקודה בשרטוט היא הנקודה אשר בה שיעור ה – X הוא הקטן ביותר בתחום $x\geq 0.1$ (קיימות אינסוף נקודות

קיצון בתחום $0<x<0.1$). כדי למצוא את ערכו של k נציב $x=0.1$ ונקבל: $\ln 0.1=\frac{\pi}{2}+\pi\cdot k$, מתקבל

הערך $k=-1.23$ לכן נקודת הקיצון שבשרטוט היא הנקודה בה $k=-1$. נציב ונקבל:

$x=e^{\frac{\pi}{2}-\pi}=e^{-\frac{\pi}{2}}\approx 0.208$. שיעור ה – Y בנקודה הוא $g\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right)=\sin\left(\ln e^{-\frac{\pi}{2}}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

גזירה שנייה והצבה תיתן נקודת מינימום.

תשובה: $\left(e^{-\frac{\pi}{2}},-1\right)$.

ד. בסעיף ג' (II) קבלנו כי שיעור ה – X של נקודות הקיצון הוא $x=e^{\frac{\pi}{2}+\pi k}$. נמצא כמה ערכי k (שלמים)

קיימים עבור האי שוויון הבא: $0.008<e^{\frac{\pi}{2}+\pi k}<120$.

ערך k המתאים לצד שמאל של האי שוויון יתקבל מהקשר $e^{\frac{\pi}{2}+\pi k}=0.008$, נקבל: $k=-2.04$.

ערך k המתאים לצד ימין של האי שוויון יתקבל מהקשר $e^{\frac{\pi}{2}+\pi k}=120$, נקבל: $k=1.02$.

לכן, ערכי k המתאימים הם $k=-2,-1,0,1$.

תשובה: לפונקציה $g(x)$ יש ארבע נקודות קיצון בתחום $0.008<x<120$.

ה. נמצא את $g''(x)$, $g''(x)=\frac{-\sin(\ln x)-\cos(\ln x)}{x^2}$. השוואה לאפס תיתן $\sin(\ln x)+\cos(\ln x)=0$.

לאחר חלוקה ב - $\cos(\ln x)$ נקבל $tg(\ln x)=-1$ $\leftarrow$ $\ln x=\frac{3\pi}{4}+\pi\cdot k$ $\leftarrow$ $x=e^{\frac{3\pi}{4}+\pi k}$.

מסעיף ג' נקבל כי צריך להתקיים $e^{-\frac{\pi}{2}}<x<\frac{\pi}{2}$. לכן נקבל $k=-1$ $\leftarrow$ $x=e^{-\frac{\pi}{4}}$. שיעור ה – Y בנקודה

הוא $g\left(e^{-\frac{\pi}{4}}\right)=\sin\left(\ln e^{-\frac{\pi}{4}}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

שיפוע הפונקציה בנקודה זו הוא $m=g'\left(e^{-\frac{\pi}{4}}\right)=\frac{\cos\left(\ln e^{-\frac{\pi}{4}}\right)}{e^{-\frac{\pi}{4}}}=\frac{\sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi}{4}}}{2}$.

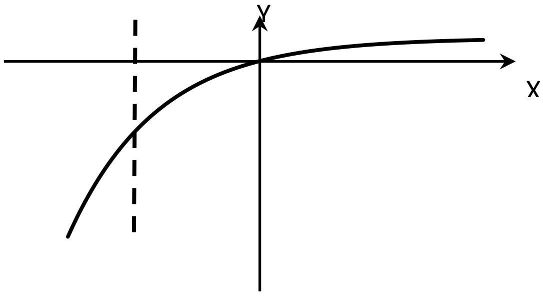
משוואת המשיק בנקודת הפיתול:

$$y+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi}{4}}}{2}\cdot\left(x-e^{-\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$\downarrow$$

$$y=\frac{\sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi}{4}}}{2}\cdot x-\sqrt{2}\approx 1.55x-\sqrt{2}$$

פתרון שאלה 5



הגרף משמאל מתאר את $f\left(x\right)$ ואת הישר $x=\frac{1}{a}$.

השטח הנתון נמצא כולו מתחת לציר ה – x (ערכו שלילי).

א. על פי הנתון: $\int_{\frac{1}{a}}^{0}\left(1-e^{ax}\right)dx=-1$ לכן $\int_{\frac{1}{a}}^{0}\left(1-e^{ax}\right)dx=\left[x-\frac{1}{a}\cdot e^{ax}\right]_{\frac{1}{a}}^{0}=\frac{e-2}{a}$.

נשווה ל – 1- ונקבל $a=2-e$.

ב. נפתור ראשית ללא הצבה של a.

$$V=\pi\cdot\int_{\frac{1}{a}}^{0}\left(1-e^{ax}\right)^2dx=\pi\cdot\int_{\frac{1}{a}}^{0}\left(1-2e^{ax}+e^{2ax}\right)dx=\pi\cdot\left[x-\frac{2}{a}e^{ax}+\frac{1}{2a}e^{2ax}\right]_{\frac{1}{a}}^{0}$$

לאחר הצבת a וחישוב הגבולות נקבל $V=\pi\cdot\frac{e^2-4e+5}{2\left(e-2\right)}$.

ג. (I) $g\left(x\right)=\int_{-x}^{x+1}\left(1-e^{at}\right)dt=\left[t-\frac{1}{a}\cdot e^{at}\right]_{-x}^{x+1}=2x+1-\frac{1}{a}\cdot\left(e^{a(x+1)}-e^{-ax}\right)$

(II) $g'\left(x\right)=2-e^{a(x+1)}-e^{-ax}$

השוואת הנגזרת לאפס והצבת $e^{ax}=k$ תיתן את המשוואה הריבועית $e^ak^2-2k+1=0$.

פתרונות המשוואה: $k_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4e^a}}{2e^a}=\frac{1\pm\sqrt{1-e^a}}{e^a}$.

נרשום $e^{ax_{1,2}}=k_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-e^a}}{e^a}$, פעולת $\ln$ בשני האגפים תיתן $ax_{1,2}=\ln\left(1\pm\sqrt{1-e^a}\right)-a$.

נציב את ערכו של a (מסעיף א') ונקבל: $x_1=0.75$, $x_2\approx-1.75$.

פתרון שאלה 1

א. הנקודה $(0,0)$ היא מרכז אחד המעגלים המשיקים לישר $x=b$ (שרטוט עליון), לכן $a-R=-b$

(נזכור כי $b<0$).

הנקודה $(0,0)$ היא גם מרכז אחד המעגלים המשיקים לישר $x=2b$ (שרטוט תחתון), לכן $a+R=-2b$.

משתי המשוואות נקבל: $a=3R$, $b=-2R$.

ב. <u>מקרה I (שרטוט עליון):</u> מרכז המעגל הנתון בנקודה $(a,0)$ ומחוגו $\frac{1}{3}a$, הישר (המקווקו) הוא $x=-\frac{2}{3}a$.

נסמן את מרכזי המעגלים המשיקים מבחוץ למעגל הנתון ולישר הנתון כ - (x,y).

מחוג המעגל הוא $r=x+\frac{2}{3}a$ ומתקיים: $r+R=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$.

לאחר הצבה והעלאה בריבוע נקבל: $(x+a)^2=(x-a)^2+y^2$, לאחר פתיחת סוגריים וסידור נקבל את

המקום הגיאומטרי: $y^2=4ax$.

<u>מקרה II (שרטוט תחתון):</u> מרכז המעגל הנתון בנקודה $(a,0)$ ומחוגו $\frac{1}{3}a$, הישר (המקווקו) הוא $x=-\frac{4}{3}a$.

נסמן את מרכזי המעגלים המשיקים מבחוץ למעגל הנתון ולישר הנתון כ - (x,y).

מחוג המעגל הוא $r=x+\frac{4}{3}a$ ומתקיים: $r-R=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$.

לאחר הצבה והעלאה בריבוע נקבל: $(x+a)^2=(x-a)^2+y^2$, לאחר פתיחת סוגריים וסידור נקבל את

המקום הגיאומטרי: $y^2=4ax$.

פתרון שאלה 2

א. וקטורי הכיוון של הישרים, שונים ולכן הם אינם מקבילים. נראה כי הישרים אינם נחתכים:

$$\begin{cases} I) & 1+t=1+2s \\ II) & 3+2t=11-s \\ III) & -6+2t=4+4s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I) & t-2s=0 \\ II) & 2t+s=8 \\ III) & 2t-4s=10 \end{cases}$$

למערכת המשוואות אין פתרון לכן הישרים מצטלבים.

נמצא את משוואת המישור המכיל את הישר l_1 ומקביל לישר l_2:

$$\begin{cases} (A,B,C)\cdot(1,2,2)=0 \\ (A,B,C)\cdot(2,-1,4)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A+2B+2C=0 \\ 2A-B+4C=0 \end{cases} \rightarrow A=2\,, B=0\,, C=-1$$

המישור עובר בנקודה $(1,3,-6)$ ומשוואתו היא $\pi_1: 2x-z-8=0$

נמצא עתה את מרחק הנקודה $(1,11,4)$ הנמצאת על הישר l_2 ממישור π_1.

$$d=\frac{|2\cdot 1-4-8|}{\sqrt{2^2+1^2}}=2\cdot\sqrt{5}$$

ב+ג. הנקודות הקרובות ביותר אחת אל השנייה על הישרים הנתונים הן הנקודות אשר וקטור הכיוון ביניהן שווה לווקטור הכיוון של מישור π_1 מוכפל בסקלר כלשהו.

נרשום את ווקטור הכיוון בין שתי נקודות על הישרים בצורה פרמטרית ונשווה ל $k\cdot(A,B,C)$ (מכפלת סקלר בווקטור הכיוון של המישור).

$$(t-2s, 2t+s-8, 2t-4s-10)=k\cdot(2,0,-1)$$

השוואה בין הרכיבים המתאימים תיתן את הפתרון: $s=0\,, t=4\,, k=2$.

הצבה של t ו - s בהצגות הפרמטריות של $l_2\,, l_1$ תיתן את הנקודות הנדרשות:

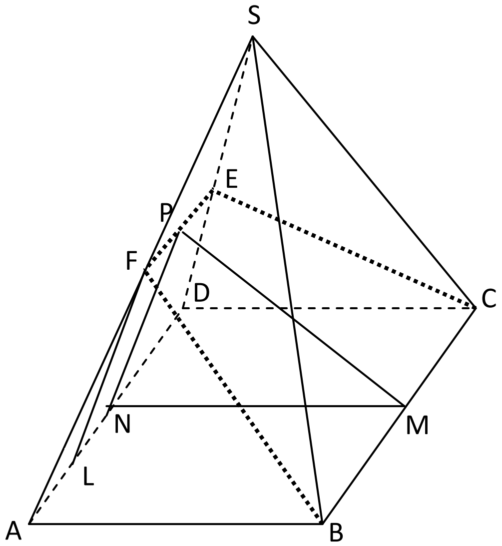
הנקודה על l_1: $(5,11,2)$.

הנקודה על l_2: $(1,11,4)$.

ד. $d=\sqrt{(5-1)^2+(11-11)^2+(2-4)^2}=2\cdot\sqrt{5}$ (כפי שהתקבל בסעיף א').

פתרון שאלה 3

הערה: לא מצוין במפורש בנתוני השאלה כי $FE \parallel AD$, כדי להוכיח זאת יש להראות כי זהו תנאי הכרחי לקיום המישור BCEF (הנקודות B , C , E ו – F נמצאות על מישור אחד!).



א. נסמן: M – אמצע BC, P - אמצע EF, N – אמצע AD

L – נקודה על AD כך ש - $FL \parallel PN$, $\sphericalangle NMS = \beta$.

נתון: $\sphericalangle NMP = \alpha$. אורך כל מקצוע, a .

$SM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ (פיתגורס).

$\sin\beta = \sqrt{\frac{2}{3}} \leftarrow \cos\beta = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

במשולש ΔPNM : $\sphericalangle N = \beta \leftarrow \sphericalangle P = 180^0 - (\alpha+\beta)$. ממשפט הסינוסים: $\frac{PN}{\sin\alpha} = \frac{PM}{\sin\beta} = \frac{NM}{\sin\sphericalangle P}$.

לאחר הצבה וסידור תוך שימוש ב – $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$, נקבל:

$$PM = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2}\cos\alpha + \sin\alpha} \;,\; FL = PN = \frac{\sqrt{3}a\sin\alpha}{\sqrt{2}\cos\alpha + \sin\alpha} .$$

במשולש ΔALF – $\sphericalangle A = 60^0$, $\sphericalangle L = 90^0$ לכן: $\frac{AL}{FL} = \tan 30^0 \leftarrow AL = FL \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sin\alpha}{\sqrt{2}\cos\alpha + \sin\alpha}$

כמו כן $EF = 2\cdot LN = 2\cdot\left(\frac{1}{2}a - AL\right) = a - \frac{2a\sin\alpha}{\sqrt{2}\cos\alpha + \sin\alpha} = a\cdot\frac{\sqrt{2}\cos\alpha - \sin\alpha}{\sqrt{2}\cos\alpha + \sin\alpha}$

שטח הטרפז הוא:

$$S_{BCEF} = \frac{1}{2}\cdot(EF + BC)\cdot PM = \frac{1}{2}\cdot\left(a\cdot\frac{\sqrt{2}\cos\alpha - \sin\alpha}{\sqrt{2}\cos\alpha + \sin\alpha} + a\right)\cdot\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2}\cos\alpha + \sin\alpha} =$$

$$= \frac{2a^2\cos\alpha}{\left(\sqrt{2}\cos\alpha + \sin\alpha\right)^2}$$

ב. עבור $\sphericalangle NPM = 90^0$ נקבל כי $\sin\alpha = \cos\beta$, לכן: $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \leftarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$. לאחר הצבה בנוסחת

שטח הטרפז, נקבל: $S_{BCEF} = \sqrt{\frac{8}{27}} \cdot a^2$.

פתרון שאלה 4

א.

$$S_1 = \int_0^a \left(e^x - e^{-x}\right)dx = \left[e^x + e^{-x}\right]_0^a = e^a + e^{-a} - 2$$

$$S_2 = \int_0^a e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^a = 1 - e^{-a}$$

ב. (I) $h(a) = S_1 - S_2 = e^a + 2e^{-a} - 3$

נגזור ונקבל: $h'(a) = e^a - 2\cdot e^{-a}$. נציב $e^a = t$, נשווה ל – 0 ונקבל: $t - \frac{2}{t} = 0 \leftarrow t = \sqrt{2}$.

לכן $a = \ln\sqrt{2}$.

ג.

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{e^a + e^{-a} - 2}{1 - e^{-a}} = \frac{\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 2}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} - 1$$

<u>פתרון שאלה 5</u>

א. נחשב את זמן מחצית החיים בשני המצבים הקיצוניים.

<u>מצב 1: משקל התחלת 101 גרם, משקל אחרי 24 ימים 49 גרם.</u>

$$T_{\frac{1}{2}\min} = \frac{\ln 0.5}{\ln 0.970312} = 23_d \leftarrow q_1 = 0.970312 \leftarrow 49 = 101 \cdot q_1^{24}$$

<u>מצב 2: משקל התחלתי 99 גרם, משקל אחרי 24 ימים 51 גרם.</u>

$$T_{\frac{1}{2}\max} = \frac{\ln 0.5}{\ln 0.97274} = 25.08_d \leftarrow q_2 = 0.97274 \leftarrow 51 = 99 \cdot q_2^{24}$$

תשובה: טווח הזמן של מחצית החיים הוא: $23_d \le T_{\frac{1}{2}} \le 25.08_d$.

ב. חישוב הזמן עבור q_1: $41 = 199 \cdot 0.970312^t \rightarrow t = 52.4_d$.

חישוב הזמן עבור q_2: $39 = 201 \cdot 0.97274^t \rightarrow t = 59.33_d$.

הערה: גם כאן נלקחו מצבי הקיצון של מדידת המשקל.

תשובה: $52.4_d \le t \le 59.33_d$

פתרון שאלה 1

א. נשווה את ההצגות הפרמטריות של נקודות על הישרים:

$$\begin{cases} I) & 3+4t=1+5s \\ II) & k+t=-4-3s \\ III) & 2+tk=k+9s \end{cases} \xrightarrow[3II+III]{3I+5II} \begin{cases} I) & 17t+5k+26=0 \\ II) & 3t+tk+2k+14=0 \end{cases} \xrightarrow{I)\ k=\frac{-17t-26}{5}} 3t-(t+2)\cdot\frac{17t+26}{5}+14=0$$

פתרונות המשוואה האחרונה והתנאי $k>0$ יתנו את הפתרונות: $t=-3, k=5, s=-2$

שיעורי נקודה A הם: $A(-9,2,-13)$.

ב. נסמן את ווקטור הכיוון של l_3 כ - (a,b,c), מתקיים:

$$\begin{cases} I) & (a,b,c)\cdot(4,1,5)=0 \\ II) & (a,b,c)\cdot(5,-3,9)=0 \end{cases}$$

פתרון המערכת נותן: $(a,b,c)=(24,-11,-17)$ וההצגה הפרמטרית של l_3 היא:

$$l_3: \underset{\rightarrow}{x}=(-9,2,-13)+r\cdot(24,-11,-17)$$

ג. (I) נמצא ראשית את הזווית בין הישרים l_1 ו - l_2:

$$\sin\alpha=\sqrt{\frac{986}{4830}} \leftarrow \cos\alpha=\frac{(4,1,5)\cdot(5,-3,9)}{|4,1,5|\cdot|5,-3,9|}=\frac{62}{\sqrt{4830}}$$

שטח הבסיס (מלבן) הוא: $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{986}=S=\frac{1}{2}\cdot\sqrt[4]{4830}^2\cdot\sqrt{\frac{986}{4830}}$.

נמצא עתה את גובה הפירמידה: $V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot h \rightarrow h=\frac{3\cdot 164\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{986}}=\sqrt{986}$

נמצא על הישר l_3 נקודה (E) שמרחקה מנקודה A שווה לגובה הפירמידה:

$\sqrt{(24r)^2+(11r)^2+(17r)^2}=h \rightarrow \sqrt{986}\cdot r=h$ ונקבל $r=\pm1$.

הצבה תיתן את שתי האפשרויות הבאות: $E(15,-9,-30)$ או $E(-33,13,4)$.

ד. מטריגונומטריה (בסיסית) נקבל: $\tan\alpha=\frac{AE}{AB}$. הצבת הערכים תיתן $\alpha\approx 82.44^0$

<u>פתרון שאלה 2</u>

א. $$Z_{1,2}=\frac{m-2\pm\sqrt{(2-m)^2+8m}}{2}=\frac{m-2\pm(m+2)}{2}$$

על פי הנתון Z_1 ממשי, לכן: $Z_1=-2$, $Z_2=m$

ב. נרשום: $Z_1\cdot Z_2=-2m$, $W_1\cdot W_2=8m$ (משוואות וייטה).

כמו כן: $Z_1=a_1, Z_2=a_1q, W_1=a_1q^2$, $W_2=a_1q^3$, נקבל:

$\frac{W_1\cdot W_2}{Z_1\cdot Z_2}=\frac{8m}{-2m}=q^4$ לכן: $q^4=-4$.

לאחר מעבר להצגה טריגונומטרית והוצאת שורש רביעי נקבל: $q=\sqrt{2}\cdot cis\left(45^0+90^0k\right)$.

מאחר ונתון כי q ברביע הראשון, הרי ש - $q=\sqrt{2}\cdot cis45^0=1+i$.

נמצא את הפרמטר m מהקשר $q=\frac{Z_2}{Z_1}$: נקבל $1+i=-\frac{m}{2}$, לכן: $m=-2-2i$.

ג. $$W_1=Z_2\cdot q=m\cdot(1+i)=-2\cdot(1+i)^2=-4i$$
$$W_2=W_1\cdot q=-4i\cdot(1+i)=4-4i$$

ד. נשרטט את המשולש במערכת צירים ונראה כי: $S_{\Delta W_1W_2Z_2}=4$.

פתרון שאלה 3

א. הפירמידה ישרה, לכן כל מקצועותיה שווים והגובה SO 'נופל' על אמצע AC – כלומר BO הוא התיכון ל – AC.

נסמן: $AC = a \;\leftarrow\; AO = BO = CO = \frac{1}{2}a$

נקבל: $\cot\alpha = \frac{1}{2}\ ,\ \cot\beta = \frac{1}{2}\ ,\ \cot\gamma = \frac{1}{2}$

$$\Downarrow$$

$$\cot^2\alpha + \cot^2\beta + \cot^2\gamma = \frac{3}{4}$$

ב. ממשפט פיתגורס: $\frac{\sqrt{5}a}{2} = \sqrt{(AO)^2 + (SO)^2} = AS \leftarrow BS = AS$.

במשולש ABS (שווה שוקיים), $\sphericalangle ASB = 180^0 - 4\alpha$. ממשפט הסינוסים נקבל:

$$\frac{AS}{\sin 2\alpha} = \frac{AB}{\sin\left(180^0 - 4\alpha\right)} \leftarrow AB = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}a\cdot\sin 4\alpha}{\sin 2\alpha} = \sqrt{5}a\cdot\cos 2\alpha$$

במשולש ABC נקבל (פיתגורס): $BC = \sqrt{(AC)^2 - (AB)^2} = \sqrt{a^2 - 5a^2\cos^2 2\alpha} = a\cdot\sqrt{1 - 5\cos^2 2\alpha}$

נפח הפירמידה הוא: $V_{ABCS} = \frac{1}{3}\cdot S_{ABC}\cdot SO$ ולאחר הצבה נקבל

$$V_{ABCS} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}a\cdot\cos 2\alpha\cdot a\cdot\sqrt{1 - 5\cos^2 2\alpha}\cdot a = \frac{\sqrt{5}}{6}a^3\cdot\cos 2\alpha\cdot\sqrt{1 - 5\cos^2 2\alpha}$$

פתרון שאלה 4

א. (I) $\lim_{x\to -\infty} f(x)=a^{-\infty}-b=-b$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=b^{\infty}-a=-a$

(II) חיתוך ציר Y: $f(0)=1-b$, $g(0)=1-a$

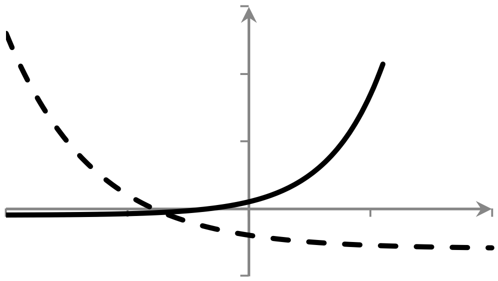
חיתוך ציר X: $f(x)=0$: $a^x-b=0 \leftarrow x=\frac{\ln b}{\ln a}$, $g(x)=0$: $b^x-a=0 \leftarrow x=\frac{\ln a}{\ln b}$

תשובה: $f(x):(0,1-b),\left(\frac{\ln b}{\ln a},0\right)$, $g(x):(0,1-a),\left(\frac{\ln a}{\ln b},0\right)$

(III) המרחק על ציר ה – X: $\Delta X=\frac{\ln a}{\ln b}-\frac{\ln b}{\ln a}$

המרחק על ציר ה – Y: $\Delta Y=a-b$

(IV)



ב. (I) הפונקציה $g(x)$ יורדת בכל תחום הגדרתה, לכן נגזרתה שלילית. ללא הערך המוחלט, הפונקציה $P(x)$ לא הייתה מוגדרת כלל.

(II) $h(x)=\ln\left[f'(x)\right]=\ln\left(a^x\cdot\ln a\right)$

חיתוך ציר X: $\ln\left(a^x\cdot\ln a\right)=0 \rightarrow a^x\cdot\ln a=1 \rightarrow \ln\left(a^x\right)+\ln(\ln a)=0 \rightarrow x=\frac{-\ln(\ln a)}{\ln a}$

חיתוך ציר Y: $h(0)=\ln\left(a^0\cdot\ln a\right)=\ln(\ln a)$

תשובה: $\left(0,\ln(\ln a)\right)$, $\left(\frac{-\ln(\ln a)}{\ln a},0\right)$

(III) עבור $a>e$ נקודת החיתוך עם ציר ה – X היא שלילית ונקודת החיתוך עם ציר ה – Y חיובית,

כלומר השטח הנדרש נמצא ברביע השני. נרשום את האינטגרל:

$$S=\int_{\frac{-\ln(\ln a)}{\ln a}}^{0}\left[\ln\left(a^x\cdot\ln a\right)\right]dx=\left[\frac{1}{2}\ln a\cdot x^2+\ln\left(\ln a\right)\cdot x\right]_{\frac{-\ln(\ln a)}{\ln a}}^{0}=\frac{\ln^2\left(\ln a\right)}{2\ln a}$$

נמצא את ערכו של a עבורו מתקבל שטח מקסימלי (גזירת פונקציית השטח לפי a), נקבל:

$$S'_{(a)}=\frac{4\ln\left(\ln a\right)-2\ln^2\left(\ln a\right)}{4a\cdot\ln^2 a}$$

נציב $\ln\left(\ln a\right)=t$, נשווה ל – 0 ונקבל $2t-t^2=0$ $\leftarrow$ $t_1=0$, $t_2=2$

עבור $t=0$ נקבל $a=e$ (לא בתנאי).

עבור $t=2$ נקבל $a=e^{\left(e^2\right)}$.

פתרון שאלה 5

א. (I) כל X.

(II) $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ לכן יש לפונקציה אסימפטוטה אופקית $y=0$ עבור $x\to\infty$.

(III) חיתוך ציר X: $x^3-ax^2=0 \leftarrow x_1=0\ ,\ x_2=a \leftarrow (0,0)\ ,\ (a,0)$

(IV) נגזור את הפונקציה: $f'(x)=\frac{(3x^2-2ax)\cdot e^x-e^x\cdot(x^2-ax^2)}{(e^x)^2}=\frac{-x\cdot(x^2-(3+a)x+2a)}{e^x}$

השוואה ל – 0 תיתן: $x\cdot(x^2-(3+a)x+2a)=0$.

פתרונות המשוואה הם $x_1=0\ ,\ x^2-(3+a)x+2a=0$

פתרון המשוואה הריבועית: $x_{2,3}=\frac{3+a\pm\sqrt{(3+a)^2-8a}}{2}=\frac{3+a\pm\sqrt{(a-1)^2+8}}{2}$

הביטוי מתחת לסימן השורש חיובי לכל a לכן יש 3 ערכי X עבורם נגזרת הפונקציה מתאפסת.

ב. (I) נמצא את משוואת המשיק.

שיפוע המשיק בנקודה $(a,0)$: $f'(a)=\frac{-a\cdot(a^2-(3+a)\cdot a+2a)}{e^a}=\frac{a^2}{e^a}$.

ומשוואת המשיק היא $y=\frac{a^2}{e^a}\cdot(x-a)$

נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים הן $\left(0,-\frac{a^3}{e^a}\right)\ ,\ (a,0)$ ושטח המשולש המתקבל הוא $S_\Delta=\frac{a^4}{2e^a}$.

השוואה לנתון תיתן את המשוואה $\frac{a^4}{2e^a}=\frac{8}{e^2}$ שאחד מפתרונותיה הוא $a=2$.

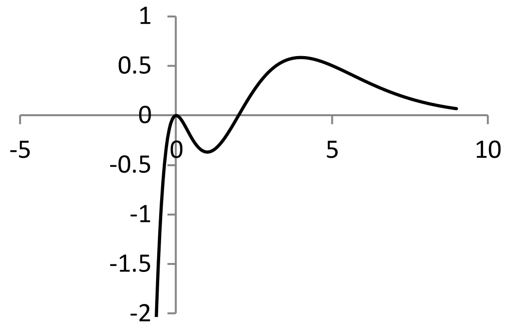
הערה: קיים פתרון נוסף $a\approx 7.026$.

(II) הצבת $a=2$ בסעיף א' IV תיתן שלוש נקודות בהן $f'(x)=0$:

את סוג הנקודות נקבע על ידי גזירה שנייה (של המונה בלבד – המכנה חיובי לכל X), נקבל:

$$\left(4,32\cdot e^{-4}\right)_{\max}\ ,\ \left(1,-e^{-1}\right)_{\min}\ ,\ \left(0,0\right)_{\max}$$

(III)



ג. נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f'(x)$ עם ציר ה – X הן שיעורי ה – X של נקודות הקיצון של $f(x)$,

לכן השטח המוגבל נתון בביטוי הבא:

$$S=\int_1^4 f'(x)dx-\int_0^1 f'(x)dx=\left[f(x)\right]_1^4+\left[f(x)\right]_1^0=f(4)+f(0)-2f(1)=32\cdot e^{-4}+2\cdot e^{-1}\approx 1.322$$

פתרון שאלה 1

נרשום את הצורה הכללית של משוואת אליפסה קנונית: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \leftarrow y=\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}\cdot x^2}$.

שיפוע המשיק (המקביל לישר העובר בראשית) הוא: $m=\frac{\sqrt{24}}{\frac{6\sqrt{5}}{5}}=\sqrt{3\frac{1}{3}}$.

גזירה של Y תיתן $y'=-\frac{\frac{b^2}{a^2}\cdot x}{\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}\cdot x^2}}$

גזירה סתומה של משוואת האליפסה תיתן $\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0 \leftarrow y'=-\frac{b^2x}{a^2y}$

נשווה את השיפוע, m ל - $y'(y=6)$ וכן, נציב את הנקודה $\left(\frac{6\sqrt{5}}{5},\sqrt{24}\right)$ במשוואת האליפסה, ונשווה את y'

ל - m , נקבל את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} -\frac{b^2x}{6a^2}=\sqrt{3\frac{1}{3}} \\ \frac{36}{5a^2}+\frac{24}{b^2}=1 \\ -\frac{\frac{b^2}{a^2}\cdot x}{\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}\cdot x^2}}=\sqrt{3\frac{1}{3}} \end{cases}$$

פתרון המערכת ייתן $a^2=12, b^2=60$ ומשוואת האליפסה היא $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{60}=1$.

פתרון שאלה 2

א. נסמן ב – E את אמצע הצלע BC. שיעורי הנקודה E הם: $E(18,51,0)$. מתקיימים שני תנאים:

(I) $x_C = 0 = 2x_E - x_B$, $y_C = 2y_E - y_B$, $z_C = 0 = 2z_E - z_B$ (אמצע קטע).

לאחר הצבה נקבל: $C(0,102-y_B,0)$ וכן $x_B = 36$

(II) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ (הישרים ניצבים זה לזה).

נקבל: $(x_B,y_B,0)\cdot(36-2x_B,102-2y_B,0)=0 \rightarrow 0 = (36,y_B,0)\cdot(-36,102-2y_B,0)$.

מתקבלת המשוואה הריבועית $y_B^2 - 51y_B + 648 = 0$ שפתרונותיה הם: $y_{B_1} = 24$, $y_{B_2} = 27$.

תשובה: אפשרות א': $C(0,78,0)$, $B(36,24,0)$

אפשרות ב': $C(0,75,0)$, $B(36,27,0)$

ב. שיעורי קודקוד A' הם: $A'(0,0,90)$.

אפשרות א': $A'(0,0,90),B(36,27,0),C(0,75,0) \rightarrow \overrightarrow{A'B}=(4,3,-10)$, $\overrightarrow{A'C}=(0,5,-6)$

נמצא את ווקטור הכיוון של המישור: $\begin{cases}(a,b,c)\cdot(4,3,-10)=0\\(a,b,c)\cdot(0,5,-6)=0\end{cases}$

פתרון מערכת המשוואות נותן: $(a,b,c)=(8,6,5)$ ולאחר הצבת הנקודה $A'(0,0,90)$ במשוואת המישור

נקבל: $\pi : \underset{\rightarrow}{x} = 8x+6y+5z-450=0$

אפשרות ב': $A'(0,0,90),B(36,24,0),C(0,78,0) \rightarrow \overrightarrow{A'B}=(6,4,-15)$, $\overrightarrow{A'C}=(0,13,-15)$

נמצא את ווקטור הכיוון של המישור: $\begin{cases}(a,b,c)\cdot(6,4,-15)=0\\(a,b,c)\cdot(0,13,-15)=0\end{cases}$

פתרון מערכת המשוואות נותן: $(a,b,c)=(45,30,26)$ ולאחר הצבת הנקודה $A'(0,0,90)$ במשוואת

המישור נקבל: $\pi : \underset{\rightarrow}{x} = 45x+30y+26z-2340=0$.

ג. ההצגה הפרמטרית של $\overrightarrow{AD}$ היא: $\overrightarrow{AD}: t\cdot(6,17,15)$.

אפשרות א': המישור $\pi: \underset{\rightarrow}{x} = 8x+6y+5z-450=0$

נציב הצגה פרמטרית של נקודות הישר במשוואת המישור, נקבל $48t+102t+75t-450=0 \leftarrow t=2$

נקודת החיתוך של הישר והמישור היא $P(12,34,30)$.

אפשרות ב': המישור $\pi: \underset{\rightarrow}{x} = 45x+30y+26z-2340=0$

נציב הצגה פרמטרית של נקודות הישר במשוואת המישור, נקבל $270t+510t+390t-2340=0 \leftarrow t=2$

נקודת החיתוך של הישר והמישור היא $P(12,34,30)$.

קבלנו בשני המקרים את אותה נקודת החיתוך!

ד. למנסרה ולפירמידה בסיס משותף. גובה הפירמידה הוא שליש מגובה המנסרה (בשני המקרים),

לכן היחס בין נפח הפירמידה לנפח המנסרה הוא $1\div 4.5$.

פתרון שאלה 3

א. פאות הצד של הפירמידה הן משולשים שווי צלעות.

נסמן ב - a את אורכי מקצועות הפירמידה. נסמן ב – M את אמצע מקצוע AC, הזווית בין שתי פאות צד סמוכות היא הזווית $\alpha = \angle BMD$.

במשולש ΔBMD הצלעות הן: $BD = \sqrt{2} \cdot a$, $BM = DM = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$.

ממשפט הקוסינוסים נקבל: $(BD)^2 = (BM)^2 + (DM)^2 - 2 \cdot (BM) \cdot (DM) \cdot \cos\alpha$

ולאחר הצבה נקבל: $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$.

ב. גובה הפירמידה $ABCDS$ (משפט פיתגורס) הוא $h = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a$.

גובה הפירמידה $EFGHS$ (דמיון משולשים) הוא $h_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot b$ ($b = EF$).

גובה הפירמידה $EFGHO$ (חיסור) הוא $h_2 = h - h_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (a - b)$.

נפח פירמידה $EFGHO$ הוא $V(b) = \frac{1}{3} \cdot b^2 \cdot h_2 = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot (ab^2 - b^3)$.

נפח מקסימלי יתקבל עבור $V'(b) = 0$, לאחר גזירה והשוואה ל – 0 נקבל: $b = \frac{2}{3} \cdot a \Leftarrow h_2 = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot a$.

אורך מקצוע הפירמידה $EFGHO$ (משפט פיתגורס) הוא $l^2 = h_2^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} b\right)^2 = \frac{5}{18} \cdot b^2$

לכן $\sin\frac{\beta}{2} = \frac{\frac{1}{2} b}{l} = \sqrt{\frac{2}{5}} \Leftarrow \cos\beta = 1 - 2\sin^2\frac{\beta}{2} \Leftarrow \cos\beta = \frac{1}{5}$

והיחס המבוקש הוא $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{5}}{-\frac{1}{3}} = -\frac{3}{5}$.

פתרון שאלה 4

א. הפונקציה $g(x)$ מוגדרת עבור $x=0 \leftarrow g(0)=0$ לכן גרף א' שייך ל - $g(x)$.

לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון ב - $x=\frac{3}{4}\pi$ (לפי $f'(x)=0 \leftarrow \cot x+1=0$) לכן גרף ג' שייך ל - $f(x)$.

ב. $f'(x)=\cot x+1 \rightarrow f'(x)=0 \rightarrow x=\frac{3}{4}\pi \rightarrow f\left(\frac{3}{4}\pi\right)\approx 2$

ל - $f(x)$ יש קיצון בנקודה $\left(\frac{3\pi}{4},2\right)$.

$g'(x)=-\tan x+1 \rightarrow g'(x)=0 \rightarrow x=\frac{1}{4}\pi \rightarrow g\left(\frac{1}{4}\pi\right)\approx 0.44$

ל - $g(x)$ יש קיצון בנקודה - $\left(\frac{\pi}{4},0.44\right)$.

ג. $$\frac{2-f'(x)}{1-f'(x)}=\frac{2-(\cot x+1)}{1-(\cot x+1)}=\frac{1-\cot x}{-\cot x}=-\tan x+1=g'(x)$$

ד. על פי הנתון $h(x)=f(x)+g(x)$ לכן $h'(x)=f'(x)+g'(x)$.

מסעיף ג' $g'(x)=\frac{2-f'(x)}{1-f'(x)}$ ולאחר הצבת $f'(x)=\sqrt{2}$ נקבל: $g'(x)=\frac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$.

לכן $0=h'(x)=f'(x)+g'(x)=\sqrt{2}+\frac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$.

הערה: קיימת אפשרות כי זו נקודת פיתול של $h(x)$ (פיתול שבו מתקיים גם $h'(x)=0$), אך לפי השרטוט לא קיימת נקודה כזו.

פתרון שאלה 5

א. האסימפטוטה $x=\ln 2$ מתקיימת כאשר $e^{2\ln 2}+b=0$ לכן $b=-4$.

האסימפטוטה $y=1\frac{1}{4}$ מתקיימת עבור $x\to-\infty$ ומתקבל $\frac{a}{b}=1\frac{1}{4}$, לכן $a=-5$.

ב. $f(x)=\frac{1\frac{1}{4}\cdot e^{x}-5}{e^{2x}-4}$. (I) נקודות החיתוך עם הצירים הן: $(\ln 4,0)$, $(0,1\frac{1}{4})$.

(II) $$f'(x)=\frac{1\frac{1}{4}\cdot e^{x}\cdot\left(e^{2x}-4\right)-2\cdot e^{2x}\cdot\left(1\frac{1}{4}\cdot e^{x}-5\right)}{\left(e^{2x}-4\right)^{2}}=\frac{-e^{x}\cdot\left(1\frac{1}{4}\cdot e^{2x}-10\cdot e^{x}+5\right)}{\left(e^{2x}-4\right)^{2}}$$

לאחר השוואה ל – 0 נקבל את הנקודות: $\left(\ln\left(4+\sqrt{12}\right),0.0837\right)_{\max}$, $\left(\ln\left(4-\sqrt{12}\right),1.166\right)_{\min}$.

קביעת סוג נקודת הקיצון יכולה להיעשות ע"י גזירה נוספת של המונה בלבד (המכנה חיובי).

(III) לפונקציה יש אס' אופקית נוספת עבור $x\to\infty$: $y=0$ (דרגת המכנה גבוהה מדרגת המונה).

ג. הערה: רצוי לשרטט סקיצה של גרף הפונקציה כדי לענות על סעיף זה.

$0<k<0.0837$ או $1.166<k<1.25$.

פתרון שאלה 6

(I) נתון: $\begin{cases} I) & M(3)-M(5)=20{,}450 \\ II) & M(5)-M(9)=25{,}450 \\ III) & M(10)=23{,}625 \end{cases}$

ממשוואות (I) ו – (II) נקבל:

$$\begin{cases} I) & M_0\cdot q^3-M_0\cdot q^5=20{,}450 \\ II) & M_0\cdot q^5-M_0\cdot q^9=25{,}450 \end{cases} \leftarrow \begin{cases} I) & M_0\cdot q^3\cdot\left(1-q^2\right)=20{,}450 \\ II) & M_0\cdot q^5\cdot\left(1-q^4\right)=25{,}450 \end{cases}$$

חלוקת המשוואות תיתן: $\frac{509}{409}=q^2\cdot\left(1+q^2\right)=\frac{(II)}{(I)}$.

פתרון המשווה הוא $q=0.85$.

תשובה: מחיר הרכב קטן ב – 15% בכל שנה.

(II) ממשוואה (III) נקבל $M_0=\frac{23{,}625}{0.85^{10}}=120{,}000$

פתרון שאלה 1

א. שיעורי המוקדים הם: $F_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a,0\right)$, $F_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,0\right)$.

משוואת הישר העובר דרך המוקד הימני: $F_1 : y = a\cdot x - \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$

משוואת הישר העובר דרך המוקד השמאלי: $F_2 : y = \frac{1}{2}a\cdot x + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

נקודת החיתוך של שני הישרים היא: $A\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}a, \sqrt{3}a^2\right)$.

נרשום $x = \frac{3\sqrt{3}}{2}a$, $y = \sqrt{3}a^2$ $\leftarrow$ $\frac{y}{x^2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{\frac{27}{4}a^2} = \frac{4\sqrt{3}}{27}$, והמקום הגיאומטרי של הנקודות A

הוא: $y = \frac{4\sqrt{3}}{27}\cdot x^2$.

ב. $d_{F_1F_2} = \sqrt{3}a$, $d_{F_1A} = \sqrt{3a^2+3a^4}$

על סמך הנתון נקבל $\sqrt{3a^2+3a^4} = 5\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}a$ $\leftarrow$ $a^2\left(a^2-49\right)=0$ $\leftarrow$ $a^2 = 49$

ומשוואת האליפסה היא: $\frac{x^2}{49}+\frac{4y^2}{49}=1$.

פתרון שאלה 2

א. הישר ניצב למישור רק אם וקטור הכיוון של הישר ניצב לכל אחד מוקטורי הכיוון של המישור, כלומר:

$$\begin{cases}(n,n+2,-4)\cdot(1,m,1)=0\\(n,n+2,-4)\cdot(-2,m+1,m)=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}n+mn+2m-4=0\\-2n+mn+2m+n+2-4m=0\end{cases}$$

פתרון מערכת המשוואות נותן את הפתרונות: $(n_1,m_1)=(1,1)$, $(n_2,m_2)=(2,\frac{1}{2})$.

ב. (I) נציב $n=1$ ונרשום את מרחק הישר $l:\underset{\to}{x}=(1,3,2)+t\cdot(1,3,-4)$ מראשית הצירים.

$(1+t)^2+(3+3t)^2+(2-4t)^2=13 \rightarrow 26t^2+4t+1=0$. למשוואה אין פתרון (ממשי).

נציב $n=2$ ונרשום את מרחק הישר $l:\underset{\to}{x}=(1,3,2)+t\cdot(2,4,-4)$ מראשית הצירים (נשווה ל - $\sqrt{13}$)

$(1+2t)^2+(3+4t)^2+(2-4t)^2=13 \rightarrow 36t^2+12t+1=0 \rightarrow t=-\frac{1}{6}$.

(קבלנו שיש על הישר נקודה שמרחקה $\sqrt{13}$ מהראשית. נבדוק עתה כי וקטור הכיוון מהראשית לנקודה זו, ניצב לישר l).

שיעורי הנקודה הם: $\left(\frac{2}{3},2\frac{1}{3},2\frac{2}{3}\right)=(1,3,2)-\frac{1}{6}\cdot(2,4,-4)$.

נבדוק ניצבות: $\left(\frac{2}{3},2\frac{1}{3},2\frac{2}{3}\right)\cdot(2,4,-4)=\frac{4}{3}+9\frac{1}{3}-10\frac{2}{3}=0$, הישרים ניצבים.

תשובה: $n=2$, $m=\frac{1}{2}$.

(II)

$$l: \quad \underset{\to}{x}=(1,3,2)+t\cdot(1,2,-2)$$
$$\pi_1: \quad x+2y-2z+24=0$$

(III) נקודת החיתוך של מישור π_1 עם ציר Z היא $(0,0,12)$.

נקודת החיתוך של הישר l ומישור π_1: $0=1+t+2(3+2t)-2(2-2t)+24 \leftarrow t=-3 \leftarrow (-2,-3,8)$

ישר החיתוך של המישורים π_1 ו - π_2 הוא הישר המחבר את נקודת החיתוך לעיל עם הנקודה המשותפת לשני

המישורים על ציר Z. וקטור הכיוון של ישר זה הוא $(2,3,4)$.

לכן שני וקטורי כיוון של π_2 הם: $(1,2,-2)$, $(2,3,4)$, ונקודה דרכה עובר המישור היא $(0,0,12)$.

ומשוואת המישור היא $\pi_2: 14x-8y-z+12=0$.

פתרון שאלה 3

א. אם $z_1 = 3cis270^0 = -3i$ הוא אחד מפתרונות המשוואה, הרי שניתן לחלק את המשוואה ב - $z+3i$

ולקבל תוצאה ללא שארית. נבצע חילוק ארוך:

$$
\begin{array}{l}
\quad z^2 - 2z + 2 \\
\hline
\quad z^3 + (3i-2)z^2 + (2-6i)z + 6i \,\big|\, (z+3i) \\
- \\
\quad z^3 + 3iz^2 \\
-------- \\
\quad -2z^2 + (2-6i)z + 6i \\
- \\
\quad -2z^2 - 6iz \\
-------- \\
\quad 2z + 6i \\
- \\
\quad 2z + 6i \\
------ \\
\qquad 0
\end{array}
$$

נמצא את פתרונות המשוואה $z^2 - 2z + 2 = 0$, נקבל: $z_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = \begin{array}{l} \nearrow\; z_2 = 1+i \\ \searrow\; z_3 = 1-i \end{array}$

תשובה: $z_1 = 3cis270^0$, $z_2 = \sqrt{2}cis45^0$, $z_3 = \sqrt{2}cis315^2$

ב. (I) צריך להתקיים $\frac{z_2}{z_3} = \frac{z_1 \cdot w}{z_2} \leftarrow w = \frac{z_2^2}{z_1 \cdot z_3}$

$$w = \frac{2cis90^0}{3\sqrt{2}cis225^0} = \frac{\sqrt{2}}{3}cis225^0 = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = -\frac{1}{3} \cdot (1+i)$$
הצבה תיתן:

(II) האיבר הראשון בסדרה (רביע שני) הוא $a_1 = z_1 \cdot w = \sqrt{2}cis135^0$ והאיבר השני בסדרה (רביע ראשון)

הוא $a_2 = z_2 = \sqrt{2}cis45^0$. מנתהסדרה היא $q = cis270^0 = -i$ סכום עשרת האיברים הראשונים הוא

$$S_{10} = \frac{\sqrt{2}cis135^0 \cdot \left(cis270^0\right)^{10} - \sqrt{2}cis135^0}{cis270^0 - 1} = \frac{\sqrt{2}\left(cis315^0 - cis135^0\right)}{\sqrt{2}cis225^0} = 2i$$

פתרון שאלה 4

א. $f'(x)=-\frac{a}{x^2} \leftarrow f'(x_1)=-\frac{a}{x_1^2}$

מתקיימים שני תנאים: $\begin{cases} I) & -\frac{a}{x_1^2}=b \\ II) & \frac{a}{x_1}=bx_1+c \end{cases} \leftarrow c^2=-4ab$

ב. נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה – X: $0=bx_2+c \leftarrow x_2=-\frac{c}{b}$.

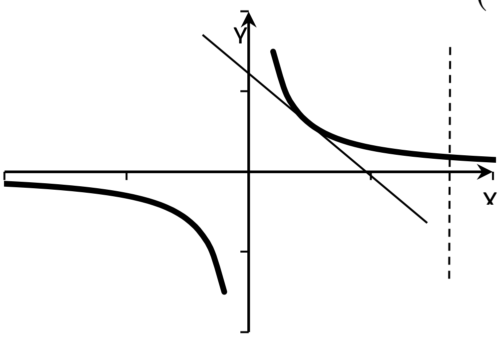
מהתנאים בסעיף א' נקבל: $\begin{cases} I) & \frac{a}{b}=-x_1^2 \\ II) & \frac{a}{b}=x_1^2+\frac{c}{b}x_1 \end{cases}$

השוואת שני הביטויים תיתן: $-x_1^2=x_1^2+\frac{c}{b}x_1 \leftarrow \frac{c}{b}=-2x_1$

לכן, נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה – X היא: $(2x_1,0)$.

ג. השטח המוגבל על ידי המשיק, ציר ה – X,

גרף הפונקציה והישר $x=e^{2.5}\cdot x_1$ הוא:



$$S=\int_{x_1}^{e^{2.5}\cdot x_1}\frac{a}{x}dx-\frac{1}{2}\cdot(2x_1-x_1)\cdot f(x_1)=[a\cdot\ln x]_{x_1}^{e^{2.5}\cdot x_1}-\frac{1}{2}x_1\cdot\frac{a}{x_1}=2a$$

השטח המוגבל על ידי המשיק והצירים הוא: $S=\frac{1}{2}\cdot 2x_1\cdot c=x_1\cdot\sqrt{-4ab}=\sqrt{-\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{-4ab}=\sqrt{4a^2}=2a$

קבלנו כי שני השטחים שווים ל - $2a$.

פתרון שאלה 5

א. (I) $f'(x)=e^{x^2+bx+c}+(2x+b)\cdot x\cdot e^{x^2+bx+c}=e^{x^2+bx+c}\cdot(2x^2+bx+1)$

$2x^2+bx+1=0 \leftarrow f'(x)=0$

על פי הנתון קיימת רק נקודה אחת אשר בה $f'(x_1)=0$ וכן $x_1>0$ לכן: $2x^2+bx+1=\left(\sqrt{2}x-1\right)^2=0$

ונקבל: $b=-2\sqrt{2}=-\sqrt{8}$.

(II) בנקודה ששיעורה x_1 יש ל - $f(x)$ נקודת קיצון מקומית או נקודת פיתול (גזירה שנייה תראה כי זו נקודת פיתול). לפונקציה את נקודות קיצון נוספות והיא רציפה בכל התחום, לכן יש לפונקציה ולישר נקודת חיתוך אחת.

ב. מסעיף א': $x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}-2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+c}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{c-1\frac{1}{2}}$

מהנתון: $f(x_1)=1$ נקבל $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{c-1\frac{1}{2}}=1 \leftarrow e^{c-1\frac{1}{2}}=\sqrt{2} \leftarrow c=1\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}$.

ג. (I) נרשום את $f(x)$: $f(x)=x\cdot e^{x^2-\sqrt{8}x+1\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}} \leftarrow f'(x)=e^{x^2-\sqrt{8}x+1\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}}\cdot\left(2x^2-\sqrt{8}x+1\right)$

כמו כן:

$$f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}\cdot e^{2-4+1\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}}=\sqrt{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{e}}$$

$$f'\left(\sqrt{2}\right)=e^{-\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}}\cdot(1)=\sqrt{\frac{2}{e}}$$

ומשוואת המשיק היא $y-\frac{2}{\sqrt{e}}=\sqrt{\frac{2}{e}}\cdot\left(x-\sqrt{2}\right) \leftarrow y=\sqrt{\frac{2}{e}}\cdot x$

(II) נשווה בין הפונקציה למשיק ונקבל: $x\cdot e^{x^2-\sqrt{8}x+1\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{2}{e}}\cdot x \leftarrow e^{x^2-\sqrt{8}x+1\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}}=\sqrt{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}}$

(צמצמנו ב – X, נזכור עתה כי $x=0$ הוא אחד מפתרונות המשוואה)

לאחר פעולת $\ln$ בשני אגפי המשוואה נקבל $x^2-\sqrt{8}x+1\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}=\ln\sqrt{2}-\frac{1}{2} \leftarrow x^2-\sqrt{8}x+2=0$

למשוואה הריבועית יש פתרון יחיד $\left(x=\sqrt{2}\right)$, לכן למשיק ולפונקציה יש שתי נקודות משותפות.

פתרון שאלה 1

א. מרכז המעגל השמאלי נמצא בנקודה $(kp,0)$ ומחוגו $r=kp$, לכן משוואתו היא:

$$(x-kp)^2+y^2=(kp)^2$$

מרכז המעגל הימני נמצא בנקודה $(kp+2p,0)$ ומחוגו $r=kp$, לכן משוואתו היא:

$$\left[x-(kp+2p)\right]^2+y^2=(kp)^2$$

ב. לנקודות ההשקה של המעגל הימני עם הפרבולה יש אותו שיעור X, לכן השוואה בין המעגל לפרבולה תיתן

משוואה בעלת פתרון יחיד, כלומר $\Delta=0$. נפתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} y^2=2px \\ \left[x-(kp+2p)\right]^2+y^2=(kp)^2 \end{cases}$$

נקבל $\left[x-(kp+2p)\right]^2+2px=(kp)^2 \leftarrow x^2-2p(k+1)x+4p^2(k+1)=0 \qquad (*)$

נשווה את הדיסקרימיננטה ל – 0 ונקבל:

$$4p^2(k+1)^2-16p^2(k+1)=0 \leftarrow 4p^2(k+1)(k+1-4)=0$$

פתרון המשוואה הוא $k=3$

ג. נמצא את נקודת ההשקה של המעגל הימני (ברביע הראשון).

מ - $(*)$ נקבל $x=\frac{-b}{2a}=p(k+1)=4p$ (נזכור כי $\Delta=0$). שיעור ה – Y בנקודה יתקבל ע"י

הצבה במשוואת הפרבולה $y=\sqrt{2p\cdot 4p}=\sqrt{8}p$. נקודת ההשקה היא $\left(4p,\sqrt{8}p\right)$.

נמצא את נקודת החיתוך של המעגל השמאלי עם הפרבולה (ברביע הראשון).

$$(x-kp)^2+2px=(kp)^2 \overset{k=3}{\leftarrow} (x-3p)^2+2px=9p^2 \leftarrow x=4p$$

קבלנו כי שני המעגלים נחתכים בנקודת ההשקה של המעגל הימני, שיעור הנקודה הוא $\left(4p,\sqrt{8}p\right)$.

נמצא עתה את שיפועי המשיקים למעגלים בנקודה זו:

מעגל שמאלי: $y=\sqrt{9p^2-(x-3p)^2} \leftarrow y'=\frac{-(x-3p)}{\sqrt{9p^2-(x-3p)^2}} \leftarrow y'(4p)=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

הזווית שיוצר המשיק עם ציר ה – X: $\tan\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{4} \leftarrow \alpha=-19.47^0$

מעגל ימני: שיפוע המשיק למעגל שווה לשיפוע הפרבולה בנקודה, נגזור את משוואת הפרבולה:

$$y=\sqrt{2px} \leftarrow y'=\sqrt{\frac{p}{2x}} \leftarrow y'(4p)=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

הזווית שיוצר המשיק עם ציר ה – X: $\tan\beta=\frac{\sqrt{2}}{4} \leftarrow \beta=19.47^0$

תשובה: הזווית בין שני המשיקים למעגלים בנקודת חיתוכם היא $\alpha+\beta=38.94^0$

פתרון שאלה 2

א. נסמן: $|\underset{\rightarrow}{w}| = b$

נרשום:

$$\overrightarrow{AC'} = \underset{\rightarrow}{u} + \underset{\rightarrow}{v} + \underset{\rightarrow}{w} \ \rightarrow \ \left|\overrightarrow{AC'}\right| = \sqrt{2a^2 + b^2}$$

$$\overrightarrow{BD'} = -\underset{\rightarrow}{u} + \underset{\rightarrow}{v} + \underset{\rightarrow}{w} \ \rightarrow \ \left|\overrightarrow{BD'}\right| = \sqrt{2a^2 + b^2}$$

$$\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{BD'} = \left(\underset{\rightarrow}{u} + \underset{\rightarrow}{v} + \underset{\rightarrow}{w}\right) \cdot \left(-\underset{\rightarrow}{u} + \underset{\rightarrow}{v} + \underset{\rightarrow}{w}\right) = b^2$$

לכן $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{BD'}}{\left|\overrightarrow{AC'}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BD'}\right|} = \dfrac{b^2}{2a^2 + b^2}$

על סמך הנתון $\left(\cos\alpha = \dfrac{1}{2}\right)$ נקבל $\dfrac{b^2}{2a^2 + b^2} = \dfrac{1}{2} \ \leftarrow \ b = \sqrt{2} \cdot a$.

תשובה: $|\underset{\rightarrow}{w}| = \sqrt{2} \cdot a$.

ב. נרשום:

$$\overrightarrow{BD} = -\underset{\rightarrow}{u} + \underset{\rightarrow}{v} \ \rightarrow \ \left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{2} \cdot a$$

$$\overrightarrow{BD'} = -\underset{\rightarrow}{u} + \underset{\rightarrow}{v} + \underset{\rightarrow}{w} \ \rightarrow \ \left|\overrightarrow{BD'}\right| = \sqrt{2a^2 + b^2}$$

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD'} = \left(-\underset{\rightarrow}{u} + \underset{\rightarrow}{v}\right) \cdot \left(-\underset{\rightarrow}{u} + \underset{\rightarrow}{v} + \underset{\rightarrow}{w}\right) = 2a^2$$

לכן $\cos\left(\sphericalangle DBD'\right) = \dfrac{\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD'}}{\left|\overrightarrow{BD}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BD'}\right|} = \dfrac{2a^2}{\sqrt{2}a \cdot 2a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \ \rightarrow \ \sphericalangle DBD' = 45^0$

ג. (I)

$$\overrightarrow{AM} = \underset{\rightarrow}{w} + k\underset{\rightarrow}{u} \ \rightarrow \ \left|\overrightarrow{AM}\right| = a \cdot \sqrt{k^2 + 2}$$

$$\overrightarrow{MC'} = (1-k)\underset{\rightarrow}{u} + \underset{\rightarrow}{v} \ \rightarrow \ \left|\overrightarrow{MC'}\right| = a \cdot \sqrt{k^2 - 2k + 2}$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\overrightarrow{AM}\right| + \left|\overrightarrow{MC'}\right| = a \cdot \left(\sqrt{k^2 + 2} + \sqrt{k^2 - 2k + 2}\right)$$

(II) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MC'}=\left(\underset{\to}{w}+k\underset{\to}{u}\right)\cdot\left((1-k)\underset{\to}{u}+\underset{\to}{v}\right)=k(1-k)\underset{\to}{u}^2=k(1-k)a^2$

$$\cos\left(\sphericalangle AMC'\right)=\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MC'}}{\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{MC'}\right|}=\frac{k(1-k)a^2}{a\cdot\sqrt{k^2+2}\cdot a\cdot\sqrt{k^2-2k+2}}$$

נציב $k=\frac{1}{2}$ ונקבל $\frac{\sqrt{5}}{15}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)a^2}{a\cdot\sqrt{\frac{1}{4}+2}\cdot a\cdot\sqrt{\frac{1}{4}-1+2}}=\cos\left(\sphericalangle AMC'\right) \leftarrow \sphericalangle AMC'=81.43^0$

(III) נסמן $f(k)=\left|\overrightarrow{AM}\right|+\left|\overrightarrow{MC'}\right|=a\cdot\left(\sqrt{k^2+2}+\sqrt{k^2-2k+2}\right)$

נקודת מינימום לפונקצית המרחק תתקבל כאשר $f'(k)=0$:

$$f'(k)=a\cdot\left(\frac{k}{\sqrt{k^2+2}}+\frac{k-1}{\sqrt{k^2-2k+2}}\right)$$

הצבת הערך $k=\frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}$ תיתן $f'\left(\frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}\right)=0$.

(גזירה שנייה והצבה תראה כי אכן מדובר בנקודת מינימום).

<u>הערה:</u> הערך שהתקבל מייצג את הנקודה, M שעבורה המרחק מ – A ל – 'C מינימאלי.

ניתן להוכיח זאת על ידי התבוננות בפריסה (מישור) של התיבה וחיבור קו ישר בין שתי הנקודות.

פתרון שאלה 3

א. נרשום:
$$z^n = \sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot i = 2cis45^0$$
$$w^n = \sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot i = \sqrt{6}cis315^0$$

והפתרון הכללי של כל אחת מהמשוואות הוא:
$$z_k = \sqrt[n]{2}\cdot cis\left(\frac{45^0}{n}+\frac{360^0}{n}\cdot k\right)\ ,\ \left(k=0,1,...n-1\right)$$
$$w_k = \sqrt[2n]{6}\cdot cis\left(\frac{315^0}{n}+\frac{360^0}{n}\cdot k\right)\ ,\ \left(k=0,1,...n-1\right)$$

ב. (I) הצמוד של z_k הוא $\overline{z_k} = \sqrt[n]{2}\cdot cis\left(-\frac{45^0}{n}-\frac{360^0}{n}\cdot k\right)$.

לכן
$$p_k = \frac{w_k}{\overline{z_k}} = \frac{\sqrt[2n]{6}\cdot cis\left(\frac{315^0}{n}+\frac{360^0}{n}\cdot k\right)}{\sqrt[n]{2}\cdot cis\left(-\frac{45^0}{n}-\frac{360^0}{n}\cdot k\right)} = \sqrt[2n]{1.5}\cdot cis\left(\frac{360^0}{n}+\frac{720^0}{n}\cdot k\right)$$

נראה כי $\frac{p_{k+1}}{p_k}$ הוא קבוע (אינו תלוי ב - k):
$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{\sqrt[2n]{1.5}\cdot cis\left(\frac{360^0}{n}+\frac{720^0}{n}\cdot\left(k+1\right)\right)}{\sqrt[2n]{1.5}\cdot cis\left(\frac{360^0}{n}+\frac{720^0}{n}\cdot k\right)} = cis\frac{720^0}{n}$$

(II) האיבר הראשון הוא: $p_0 = \sqrt[2n]{1.5}\cdot cis\frac{360^0}{n}$

מנת הסדרה התקבלה בסעיף (I): $q = cis\frac{720^0}{n}$

(III)
$$S_n = \frac{p_0\cdot\left(q^n-1\right)}{q-1} = \frac{\sqrt[2n]{1.5}\cdot cis\frac{360^0}{n}\cdot\left(cis\frac{720^0\cdot n}{n}-1\right)}{cis\frac{720^0}{n}-1} = \frac{\sqrt[2n]{1.5}\cdot cis\frac{360^0}{n}\cdot\cancel{\left(cis720^0-1\right)}}{cis\frac{720^0}{n}-1} = 0$$

סכום איברי הסדרה הוא 0.

(IV)
$$p_0\cdot p_1\cdot p_2\cdot ....\cdot p_{n-1} = p_0q^0\cdot p_0q\cdot p_0q^2\cdot ....\cdot p_0q^{n-1} =$$
$$= p_0^n\cdot q^{0+1+2+...+n-1} = p_0^n\cdot q^{\frac{1}{2}n(n-1)} = \left(\sqrt[2n]{1.5}\right)^n\cdot\left(cis\frac{720^0}{n}\right)^{\frac{1}{2}n(n-1)} =$$
$$= \sqrt{1.5}\cdot cis\left(360^0\left(n-1\right)\right) = \sqrt{1.5}\cdot cis360^0 = \sqrt{1.5}$$

פתרון שאלה 4

א. נתון: $f\left(x\right)=e^{|x|-a}$

$f\left(-x\right)=e^{|-x|-a}=e^{|x|-a}=f\left(x\right)$, לכל $f\left(x\right)$ היא פונקציה זוגית.

ב. (I) עבור $x\geq 0$ מתקבל $f\left(x\right)=e^{x-a}$, עבור $x<0$ מתקבל $f\left(x\right)=e^{-x-a}$.

לכן $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ לכל X.

(II) הפונקציה $g\left(x\right)$ רציפה ב - $x=0$ אם $\lim\limits_{x\to 0^-} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+} g\left(x\right)$.

על פי הנתון $\lim\limits_{x\to 0^+} g\left(x\right)=e^{-a}$ ו - $\lim\limits_{x\to 0^-} g\left(x\right)=e^{-a}$ לכן $g\left(x\right)$ רציפה ב - $x=0$.

(III) נבדוק את נגזרת הפונקציה $g\left(x\right)$ מימין ומשמאל ל - $x=0$:

עבור $x\geq 0$: $g'\left(x\right)=e^{x-a}$ $\leftarrow$ $\lim\limits_{x\to 0^+} g'\left(x\right)=e^{-a}$.

עבור $x<0$: $g'\left(x\right)=-e^{-x-a}$ $\leftarrow$ $\lim\limits_{x\to 0^-} g'\left(x\right)=-e^{-a}$.

קיבלנו שהנגזרת מימין ל – 0 שונה מהנגזרת משמאל ל – 0, לכן הנגזרת של $g\left(x\right)$ איננה מוגדרת ב - $x=0$.

ג. הפונקציה $f\left(x\right)$ זוגית, לכן $\int_{-a}^{a} f\left(x\right)dx=2\cdot\int_0^a f\left(x\right)dx$. כמו כן, עבור $x\geq 0$

קבלנו בסעיף ב' I כי $e^{|x|-a}=e^{x-a}$. לכן: $\int_{-a}^{a} f\left(x\right)dx=2\cdot\int_0^a g\left(x\right)dx$.

לאחר הצבת הנתונים נקבל: $\int_{-a}^{a} f\left(x\right)dx=2\cdot\int_0^a e^{x-a}=2\cdot\left[e^{x-a}\right]_0^a=2\cdot\left(1-e^{-a}\right)=\frac{4}{3}$

לכן, נקבל $a=\ln 3$.

פתרון שאלה 5

נתון: <u>חומר A</u> $M_8=\frac{1}{2}M_0 \leftarrow \frac{1}{2}M_0=M_0\cdot q_A^8 \leftarrow q_A=\sqrt[8]{0.5}$

<u>חומר B</u> $M_{16}=\frac{1}{2}M_0 \leftarrow \frac{1}{2}M_0=M_0\cdot q_B^{16} \leftarrow q_B=\sqrt[16]{0.5}$

דגימה א' (α): כמות חומר A - $1000-M_0$, כמות חומר B - M_0.

כמות החומר הכוללת בדגימה א' כעבור 10 ימים:

$$M_{10(\alpha)}=(1000-M_0)\cdot q_A^{10}+M_0\cdot q_B^{10}=(1000-M_0)\cdot 0.5^{\frac{10}{8}}+M_0\cdot 0.5^{\frac{10}{16}}$$

דגימה ב' (β): כמות חומר A - M_0, כמות חומר B - $1000-M_0$

כמות החומר הכוללת בדגימה ב' כעבור 10 ימים:

$$M_{10(\beta)}=(1000-M_0)\cdot q_B^{10}+M_0\cdot q_A^{10}=(1000-M_0)\cdot 0.5^{\frac{10}{16}}+M_0\cdot 0.5^{\frac{10}{8}}$$

זמן מחצית החיים של חומר A קטן יותר מזמן מחצית החיים של חומר B, לכן הדגימה בה הכמות של חומר A גדולה יותר, מתפרקת מהר יותר. על פי הנתון $M_0>500_{gr}$ לכן דגימה א' מתפרקת מהר יותר מדגימה ב'.

נרשום: $M_{10(\alpha)}=1.18653\cdot M_{10(\beta)}$ ולאחר הצבה, נקבל:

$$(1000-M_0)\cdot 0.5^{\frac{10}{8}}+M_0\cdot 0.5^{\frac{10}{16}}=1.18653\cdot(1000-M_0)\cdot 0.5^{\frac{10}{16}}+M_0\cdot 0.5^{\frac{10}{8}}$$

לאחר פתיחת סוגריים והעברת אגפים, נקבל $M_0=700_{gr}$.

פתרון שאלה 1

א. המישורים ניצבים זה לזה לכן המכפלה הסקלארית של וקטורי הכיוון שלהם שווה ל – 0.

$$\left(A,B,1\tfrac{1}{2}AB\right)\cdot\left(-B,-A,1\tfrac{1}{2}AB+1\right)=0$$
$$\downarrow$$
$$2\tfrac{1}{4}\left(AB\right)^2-\tfrac{1}{2}\left(AB\right)=0$$
$$\downarrow$$
$$AB=\frac{2}{9}$$

ב. נציב $AB=\frac{2}{9}$ במשוואות המישורים:

$$\begin{cases}\pi_1: & AX+BY+\frac{1}{3}Z+D=0\\ \pi_2: & -BX-AY+\frac{4}{3}Z+D=0\end{cases}$$

מרחק כל אחד מהמישורים מראשית הצירים:

$$\begin{cases}d_1=\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+\frac{1}{9}}}\\ d_2=\frac{D}{\sqrt{B^2+A^2+\frac{16}{9}}}\end{cases} \quad d_1=\sqrt{3.5}\cdot d_2 \quad A^2+B^2=\frac{5}{9} \quad B=\frac{2}{9A} \quad 81A^4-45A^2+4=0$$

פתרון המשוואה הדו – ריבועית נותן את הפתרונות הבאים: $\left(A,B\right)=\left(\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3}\right),\left(\pm\frac{2}{3},\pm\frac{1}{3}\right)$

ג. כפי שראינו בסעיף ב' – קיימים 4 זוגות מישורים המקיימים את תנאי הבעיה.

ד. (I) במשוואה של d_1 (בסעיף ב'), נציב $A^2+B^2=\frac{5}{9}$ ונקבל: $d_1=\frac{D}{\sqrt{\frac{5}{9}+\frac{1}{9}}}=\frac{3D}{\sqrt{6}}$.

נשווה לנתון $d_1=3\sqrt{6}$, ונקבל $\frac{3D}{\sqrt{6}}=3\sqrt{6}$ $\leftarrow$ $D=6$.

מהנתון $A+B=1$, $A>B$ ומתוצאת סעיף ב', נקבל: $B=\frac{1}{3}$, $A=\frac{2}{3}$.

משוואות המישורים הן:
$$\begin{cases}\pi_1: & \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z+6=0\\ \pi_2: & -\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{4}{3}z+6=0\end{cases}$$

(II) נמצא שתי נקודות משותפות לשני המישורים: $\left(-18,18,0\right)$, $\left(0,-9,-9\right)$.

וההצגה הפרמטרית של ישר החיתוך היא $l:\underset{\sim}{x}=\left(0,-9,-9\right)+t\cdot\left(2,-3,-1\right)$

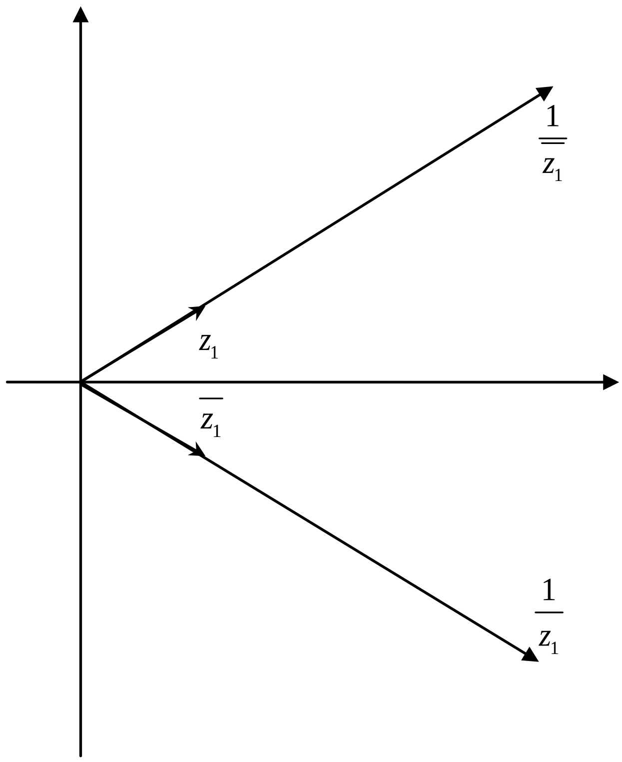
פתרון שאלה 2

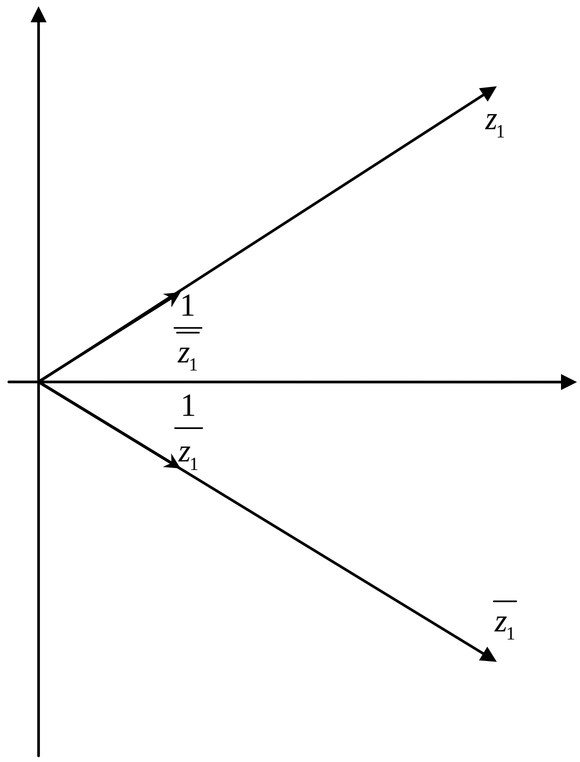
א. (I) $\overline{z_1} = a - bi$

(II) $$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} \cdot i$$

(III) $$\frac{1}{\overline{\overline{z_1}}} = \overline{\left(\frac{1}{z_1}\right)} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2} \cdot i$$

ב. $a^2+b^2>1 \leftarrow |z_1|>1$ $\qquad$ $a^2+b^2<1 \leftarrow |z_1|<1$





ג. (I) מהנתון $|z_1|=\sqrt{10}$ נקבל $a^2+b^2=10$.

המרובע הוא טרפז שאורך בסיסו הגדול $z_1\overline{z_1}$ הוא $2b$ ואורך בסיסו הקטן $\frac{1}{z_1}\overline{\frac{1}{z_1}}$ הוא $\frac{2b}{a^2+b^2}$.

גובה הטרפז הוא $H=a-\frac{a}{a^2+b^2}$.

שטח הטרפז הוא: $S=\frac{\left(2b+\frac{2b}{a^2+b^2}\right)\cdot\left(a-\frac{a}{a^2+b^2}\right)}{2}=\left(b+\frac{b}{10}\right)\cdot\left(a-\frac{a}{10}\right)=\frac{99}{100}ab$

נציב $b=\sqrt{10-a^2}$ ונקבל $S(a)=\frac{99}{100}a\cdot\sqrt{10-a^2}=\frac{99}{100}\cdot\sqrt{10a^2-a^4}$.

גזירת פונקצית השטח והשוואה ל – 0 תיתן $a=\sqrt{5}\ \leftarrow\ b=\sqrt{5}$.

(II) נציב $a=\sqrt{5}$ ונקבל $S_{\max}=\frac{99}{100}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=\frac{99}{20}=4.95$

פתרון שאלה 3

א. נסמן את גובה הפירמידה ב – H, נקבל: $\frac{H}{\frac{1}{2}b}=\tan\alpha$, $\frac{H}{\frac{1}{2}a}=\tan\beta$ $\leftarrow$ $\frac{a}{b}=\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$

מהנתון $\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cdot\sin\beta$

נקבל (תוך שימוש בזהות $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$):

$\sin\alpha\cos\beta=3\cos\alpha\sin\beta$ $\leftarrow$ $\tan\alpha=3\tan\beta$, לכן $\frac{a}{b}=3$.

ב. נסמן ב – E את אמצע הצלע AB, ממשפט פיתגורס נקבל $(SE)^2=\frac{3}{4}a^2$, לכן $H^2=\frac{3}{4}a^2-\frac{1}{4}b^2$.

נציב $a=3b$ ונקבל $H=\frac{\sqrt{26}\cdot b}{2}$.

$\tan\alpha=\frac{H}{\frac{1}{2}b}=\sqrt{26}$ $\leftarrow$ $\alpha=78.9^0$

פתרון שאלה 4

א. (I) $f(-x)=\left[a\cdot(-x)^2-1\right]\cdot e^{-a\cdot(-x)^2}=\left(ax^2-1\right)\cdot e^{ax^2}=f(x)$ $\leftarrow$ הפונקציה זוגית.

(II) $f'(x)=2ax\cdot e^{-ax^2}+\left(ax^2-1\right)\cdot(-2ax)\cdot e^{-ax^2}=2ax\cdot e^{-ax^2}\cdot\left(2-ax^2\right)$

נמצא את $f'(-x)$: $f'(-x)=-2ax\cdot e^{-ax^2}\cdot\left(2-ax^2\right)=-f'(x)$ $\leftarrow$ הפונקציה הנגזרת היא אי זוגית.

ב. נמצא את שיעורי נקודה t. $f'(t)=0$ $\leftarrow$ $2-at^2=0$ $\leftarrow$ $t=\sqrt{\frac{2}{a}}$.

השטח המוגבל הוא: $S=\int_0^{\sqrt{\frac{2}{a}}} f'(x)dx=\left[f(x)\right]_0^{\sqrt{\frac{2}{a}}}=e^{-2}+1\approx 1.135$.

ג. נקודות הקיצון המוחלטות הן נקודות הקיצון המקומיות (על פי השרטוט). נמצא את נקודות הקיצון המקומיות של $f'(x)$.

$$f''(x)=\left(2a\cdot e^{-ax^2}-4a^2x^2\cdot e^{-ax^2}\right)\cdot\left(2-ax^2\right)-4a^2x^2\cdot e^{-ax^2}=2a\cdot e^{-ax^2}\cdot\left(2a^2x^4-7ax^2+2\right)$$

השוואה ל – 0 תיתן: $2a^2x^4-7ax^2+2=0$. למשוואה זו 4 פתרונות אשר שניים מהם חיוביים.

$x_1=\sqrt{\frac{7-\sqrt{33}}{4a}}$, $x_2=\sqrt{\frac{7+\sqrt{33}}{4a}}$, על פי הנתון $x_2-x_1=\sqrt{\frac{1}{2}}$ לכן $\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{7+\sqrt{33}}{4a}}-\sqrt{\frac{7-\sqrt{33}}{4a}}$

פתרון המשוואה נותן $a=3$.

ד. (I) מסעיף ב': $t=\sqrt{\frac{2}{a}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

(II) ל - $f(x)$ יש שתי נקודות קיצון, ב - t וב - $-t$ ($f(x)$ זוגית) ונקודה נוספת ב - $x=0$.

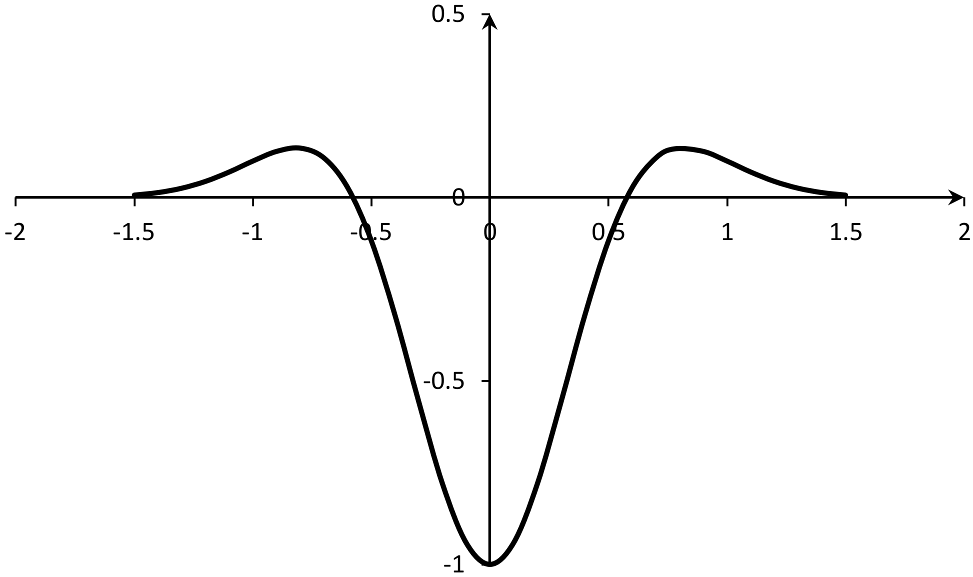
נמצא את $f(t)$: $f(t)=f\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)=\left(3\cdot\tfrac{2}{3}-1\right)\cdot e^{-3\cdot\frac{2}{3}}=e^{-2}$.

מהתבוננות בגרף הנגזרת ניתן לקבוע את סוגי נקודות הקיצון.

$$\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}},e^{-2}\right)_{\max}\ ,\ (0,-1)_{\min}\ ,\ \left(-\sqrt{\tfrac{2}{3}},e^{-2}\right)_{\max}$$

(III)   נקודות חיתוך הצירים הן: $\left(\sqrt{\frac{1}{3}},0\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}},0\right)$, $(0,-1)$

ה.



פתרון שאלה 5

א. הפונקציה $g(a,b)$ מחשבת את נפח הגוף המתקבל מסיבוב גרף הפונקציה $f(x)$ סביב ציר ה – X כאשר היא מוגבלת על ידי הישרים $x=a+1$, $x=a-1$.

ב. (I)

$$g(a,b)=\pi\cdot\int_{a-1}^{a+1}\frac{a}{ax+b}dx=\pi\cdot\left[\ln(ax+b)\right]_{a-1}^{a+1}=$$
$$=\pi\cdot\left[\ln\left(a^2+a+b\right)-\ln\left(a^2-a+b\right)\right]=\pi\cdot\ln\left(\frac{a^2+a+b}{a^2-a+b}\right)$$

(II) $g(a,b)$ היא אינטגרל של פונקציה ריבועית ולכן חיובית תמיד!

ג. נגזור לפי a (הפרמטר b קבוע), נקבל

$$g'_{(a)}(a,b)=\pi\cdot\frac{a^2-a+b}{a^2+a+b}\cdot\frac{(2a+1)\cdot\left(a^2-a+b\right)-(2a-1)\cdot\left(a^2+a+b\right)}{\left(a^2-a+b\right)^2}=$$
$$=\pi\cdot\frac{2b-2a^2}{\left(a^2+b\right)^2-a^2}$$

השוואה ל – 0 תיתן $b=a^2$.

נציב ב - $g(a,b)$ ונקבל $g(a,b)=g\left(a,a^2\right)=\pi\cdot\ln\left(\frac{2a^2+a}{2a^2-a}\right)=\pi\cdot\ln\left(\frac{2a+1}{2a-1}\right)$.

השוואה לנתון: $\frac{2a+1}{2a-1}=2 \leftarrow a=1\frac{1}{2} \leftarrow b=2\frac{1}{4}$

פתרון שאלה 1

א. נקודת ההשקה היא $\left(x_1, \sqrt{12x_1}\right)$.

נגזרת הפונקציה $y=\sqrt{12x}$ היא $y'=\frac{12}{2\sqrt{12x}}=\sqrt{\frac{3}{x}}$ ושיפוע המשיק הוא לכן $m=\sqrt{\frac{3}{x_1}}$.

משוואת המשיק: $y-\sqrt{12x_1}=\sqrt{\frac{3}{x_1}}\cdot\left(x-x_1\right) \leftarrow y=\sqrt{\frac{3}{x_1}}\cdot x+\sqrt{3x_1}$

ב. (I) נמצא את נקודת החיתוך של הישר והמעגל: $\left(x+a\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{x_1}}\cdot x+\sqrt{3x_1}\right)^2=a^2$

לאחר פתיחת הסוגריים וכינוס איברים דומים מתקבלת המשוואה הריבועית:

$$\left(x_1+3\right)\cdot x^2+2x_1\left(a+3\right)\cdot x+3x_1^2=0 \qquad (*)$$

למעגל ולמשיק יש נקודת משותפת אחת, לכן נדרוש פתרון יחיד למשוואה הריבועית, כלומר $\Delta=0$.

נקבל $\left(2x_1\left(a+3\right)\right)^2-4\left(x_1+3\right)\cdot 3x_1^2=0$. לאחר סידור המשוואה וחילוץ a נקבל $a=\sqrt{3x_1+9}-3$

(II) נמצא את הפתרון היחיד של $(*)$: $x_B=\frac{-2x_1\left(a+3\right)}{2\left(x_1+3\right)}=\frac{-2x_1\cdot\sqrt{3x_1+9}}{2\left(x_1+3\right)}=-\sqrt{\frac{3x_1^2}{x_1+3}}$.

שיעור ה – Y בנקודה B יתקבל על ידי הצבה במשוואת המשיק.

תשובה: $B\left(-\sqrt{\frac{3x_1^2}{x_1+3}}\ ,\ \sqrt{3x_1}-\sqrt{\frac{3x_1}{x_1+3}}\right)$

ג. הנקודה B מחלקת את הקטע AD כך שמתקיים

$$\frac{AB}{BD}=3 \rightarrow x_A-x_B=3\cdot\left(x_B-x_D\right) \rightarrow x_A+3x_D=4x_B \quad (**).$$

נמצא את שיעורי נקודה D: חיתוך המשיק עם ציר ה – X נותן $x_D=-x_1$

הצבת ערכי X ב - $(**)$ נותנת: $x_1+3\cdot\left(-x_1\right)=-4\cdot\sqrt{\frac{3x_1^2}{x_1+3}} \rightarrow x_1=9$

פתרון שאלה 2

א. נסמן את נקודה C: $C\left(x_1, y_1, z_1\right)$ (נקבל כך כמובן גם את נקודה D).

מתקיימים מספר תנאים:

(I) הנקודה C נמצאת במישור π : $3x_1 - 2y_1 + 6z_1 - 10 = 0$

(II) המכפלה הסקלרית בין וקטור הכיוון של הרדיוס AC והמשיק BC שווה ל – 0:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \leftarrow \left(x_1 - 2, y_1 + 2, z_1\right) \cdot \left(x_1 + 8, y_1 - 10\tfrac{1}{2}, z_1 - 9\tfrac{1}{6}\right) = 0$$

(III) המרחק מנקודה A לנקודה C שווה לרדיוס המעגל: $\left(x_1 - 2\right)^2 + \left(y_1 + 2\right)^2 + z_1^2 = \left(5\tfrac{5}{6}\right)^2$

פתרון מערכת המשוואות נותן את הפתרון הפרמטרי: $\left(x_1, y_1, z_1\right) = \left(k\ , \dfrac{15k - 27}{16}\ , \dfrac{53 - 9k}{48}\right)$

ואת המשוואה הריבועית $k^2 - 2k - 15 = 0 \leftarrow \left(k - 5\right)\left(k + 3\right) = 0 \leftarrow k_1 = 5\ ,\ k_2 = -3$

הצבת ערכי k שהתקבלו נותנים את שיעורי שתי נקודות ההשקה: $C\left(5, 3, \tfrac{1}{6}\right)\ ,\ D\left(-3, -4\tfrac{1}{2}, 1\tfrac{2}{3}\right)$

ב.

$$\overrightarrow{AB} = \left(-10, 12\tfrac{1}{2}, 9\tfrac{1}{6}\right)$$
$$\overrightarrow{CD} = \left(-8, -7\tfrac{1}{2}, 1\tfrac{1}{2}\right)$$

והמכפלה הסקלרית היא $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \left(-10, 12\tfrac{1}{2}, 9\tfrac{1}{6}\right) \cdot \left(-8, -7\tfrac{1}{2}, 1\tfrac{1}{2}\right) = 80 - 93\tfrac{3}{4} + 13\tfrac{3}{4} = 0$

פתרון שאלה 3

נפתור באמצעות וקטורים.

א. נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underset{\rightarrow}{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underset{\rightarrow}{w}$; $\overrightarrow{BE} = t \cdot \underset{\rightarrow}{v}$, $\overrightarrow{D'F} = s \cdot \underset{\rightarrow}{u}$

נביע את הוקטורים $\overrightarrow{BF}$ ו - $\overrightarrow{DE}$:

$$\overrightarrow{BF} = \underset{\rightarrow}{u}(s-1) + \underset{\rightarrow}{v} + \underset{\rightarrow}{w}$$
$$\overrightarrow{DE} = \underset{\rightarrow}{u} + \underset{\rightarrow}{v}(t-1) + \underset{\rightarrow}{w}$$

על פי הנתון BEFD הוא מרובע וכל קודקודיו נמצאים במישור אחד, לכן אלכסוניו נחתכים.

נסמן את נקודת מפגש האלכסונים באות M. מתקיים: $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BD}$.

נסמן: $\overrightarrow{BM} = k \cdot \overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{DM} = r \cdot \overrightarrow{DE}$, נקבל: $k \cdot \left[\underset{\rightarrow}{u}(s-1) + \underset{\rightarrow}{v} + \underset{\rightarrow}{w}\right] - r \cdot \left[\underset{\rightarrow}{u} + \underset{\rightarrow}{v}(t-1) + \underset{\rightarrow}{w}\right] = -\underset{\rightarrow}{u} + \underset{\rightarrow}{v}$

לאחר סידור והשוואת מקדמים נקבל את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} k(s-1) - r = -1 \\ k - r(t-1) = 1 \\ k - r = 0 \end{cases}$$

פתרון המערכת נותן $t = s$.

לכן $BE = D'F \leftarrow BE = DF$

כמו כן ברור כי $FE \| BD$ (נמצאים על מישורים מקבילים).

לכן מרובע BEFD הוא טרפז שווה שוקיים.

ב. נסמן ב – G את אמצע FE וב – P את אמצע BD.

$$\overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}\left[\underset{\rightarrow}{u}(1-t) + \underset{\rightarrow}{v}(t-1)\right]$$
$$\overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}\left(\underset{\rightarrow}{u} - \underset{\rightarrow}{v}\right)$$

נביע עתה את $\overrightarrow{GP}$: $\overrightarrow{GP}=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DP}=-\frac{1}{2}t\left(\vec{u}+\vec{v}\right)-\vec{w}$

על פי הנתון (הזווית בין מישור BEFD למישור ABCD היא α), $\overrightarrow{PG}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{PG}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\alpha$

נציב ונקבל: $\left[\frac{1}{2}t\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\vec{w}\right]\cdot\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=\sqrt{\frac{1}{4}t^2\left(\vec{u}^2+\vec{v}^2\right)+\vec{w}^2}\cdot\sqrt{\vec{u}^2+\vec{v}^2}\cdot\cos\alpha$

או: $\frac{1}{2}t\left(\vec{u}^2+\vec{v}^2\right)=\sqrt{\frac{1}{4}t^2\left(\vec{u}^2+\vec{v}^2\right)+\vec{w}^2}\cdot\sqrt{\vec{u}^2+\vec{v}^2}\cdot\cos\alpha$

נציב: $|\vec{w}|=b$, $|\vec{u}|=|\vec{v}|=a$ ונקבל $\frac{1}{2}t\cdot 2a^2=\sqrt{\frac{1}{4}t^2\cdot 2a^2+b^2}\cdot\sqrt{2a^2}\cdot\cos\alpha$

ולאחר סידור $\cos\alpha=\frac{ta}{\sqrt{t^2a^2+2b^2}} \quad \leftarrow \quad t^2=\frac{2b^2}{a^2\cdot\tan^2\alpha} \qquad (*)$

נביע עתה את אורכי הבסיסים של הטרפז ואת גובה הטרפז.

$$\begin{aligned}
&\left|\overrightarrow{FE}\right|=\sqrt{(1-t)^2\,\vec{u}^2+(t-1)^2\,\vec{v}^2}=\sqrt{2}\cdot(1-t)\cdot a\\
(**)\qquad &\left|\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{\vec{u}^2+\vec{v}^2}=\sqrt{2}\cdot a\\
&\left|\overrightarrow{GP}\right|=\sqrt{\tfrac{1}{2}t^2a^2+b^2}
\end{aligned}$$

שטח הטרפז הוא: $S_{BEFD}=\frac{1}{2}\cdot\left(\left|\overrightarrow{FE}\right|+\left|\overrightarrow{BD}\right|\right)\cdot\left|\overrightarrow{GP}\right|=\frac{\sqrt{2}a}{2}(2-t)\cdot\frac{\sqrt{t^2a^2+2b^2}}{\sqrt{2}}$

ולאחר הצבה של $(*)$ נקבל: $S_{BEFD}=\frac{b\cdot\left(\sqrt{2}a-b\cot\alpha\right)}{\sin\alpha}$

ג. (I) עבור $t=1$ הקודקודים E, F ו – C' מתלכדים ואז הזווית α מינימלית.

נציב ב - $(*)$ $t=1$ ונקבל: $\cos\alpha_{\min}=\frac{a}{\sqrt{a^2+2b^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+8a^2}}=\frac{1}{3}$

לכן $\alpha_{\min}=70.53^0$

תשובה: $70.53^0<\alpha\le 90^0$

(II) נסמן $EC'=FC'=d$.

את נפח הפירמידה הקטומה ניתן לחשב על ידי חיסור נפחים של הפירמידה המשלימה (החלק הקטום) מהפירמידה השלמה (הקטומה ועוד החלק הקטום). מדמיון משולשים ומעט עבודה אלגברית נוכל לראות כי נפח הפירמידה הקטומה נתון בביטוי הבא: $V_P=\frac{1}{3}a\cdot\left(a^2+ad+d^2\right)$.

נפח התיבה הוא $V_T=2a^3$.

יחס הנפחים הוא 3, לכן נוכל לרשום $\frac{2a^3}{\frac{1}{3}a\cdot\left(a^2+ad+d^2\right)}=3$.

לאחר סידור המשוואה נקבל: $d^2+ad-a^2=0$ שפתרונה הוא $d=\frac{a\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$

כמו כן $d=a(1-t)$ לכן $t=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. הצבה ב - $(*)$ ופתרון המשוואה נותן $\alpha=82.3^0$.

פתרון שאלה 4

א. לגרף ב' יש שתי נקודות קיצון ולגרף א' יש שתי נקודות חיתוך עם ציר X.

לכן גרף א' מתאר את הפונקציה $g(x)$ וגרף ב' מתאר את $f(x)$.

ב. (I) נקודות הקיצון של $f(x)$:

$$f'(x)=(\cos x-\sin x)\cdot e^{(\sin x+\cos x)} \xleftarrow{f'(x)=0} \cos x-\sin x=0 \leftarrow \tan x=1$$

הפתרונות בתחום הנתון הם: $x_1=\frac{\pi}{4}$, $x_2=\frac{5\pi}{4}$

נקבע את סוג הנקודות ע"י גזירה שנייה:

$$f''(x)=(-\sin x-\cos x)\cdot e^{(\sin x+\cos x)}+(\cos x-\sin x)^2\cdot e^{(\sin x+\cos x)}= \qquad (*)$$
$$=e^{(\sin x+\cos x)}\cdot\left(-\sin x-\cos x+(\cos x-\sin x)^2\right)$$

נציב את ערכי X בפונקציה ובנגזרת השנייה ונקבל: $\left(\frac{\pi}{4},4.11\right)_{\max}$, $\left(\frac{5\pi}{4},0.243\right)_{\min}$

נקודות הקיצון של $g(x)$:

הנגזרת השנייה של $f(x)$ היא הנגזרת הראשונה של $g(x)$. מ - $(*)$ נקבל:

$$g'(x)=(-\sin x-\cos x)\cdot e^{(\sin x+\cos x)}+(\cos x-\sin x)^2\cdot e^{(\sin x+\cos x)}=$$
$$=e^{(\sin x+\cos x)}\cdot\left(-\sin x-\cos x+(\cos x-\sin x)^2\right)$$

השוואת הנגזרת ל – 0 נותנת $-\sin x-\cos x+(\cos x-\sin x)^2=0$.

כדי לפתור משוואה זו, נעביר אגפים ונעלה בריבוע, נקבל

$$\sin x+\cos x=1-2\sin x\cos x \xrightarrow{\wedge 2} (\sin x+\cos x)^2=(1-2\sin x\cos x)^2$$

לאחר פתיחת סוגריים נקבל

$$1+2\sin x\cos x=1-4\sin x\cos x+4\sin^2 x\cos^2 x \xrightarrow{2\sin x\cos x=\sin 2x} \sin^2 2x-3\sin 2x=0$$

פתרון המשוואה הוא $x=\frac{\pi}{2}\cdot k$. (נזכור כי העלינו בריבוע, לכן ייתכנו פתרונות שאינם נכונים).

לאחר בדיקת הפתרונות ומציאת שיעורי ה – Y ובחינת סוג נקודת הקיצון, נקבל: $\left(\frac{\pi}{2},-e\right)_{\min}$

(II) נשווה את $f\left(x\right)$ ו - $g\left(x\right)$: $e^{(\sin x+\cos x)}=\left(\cos x-\sin x\right)\cdot e^{(\sin x+\cos x)}$

נקבל: $\cos x-\sin x=1 \xleftarrow{\wedge 2} \sin 2x=0 \leftarrow x=\frac{\pi}{2}\cdot k$.

לאחר בדיקה (חייבים לבדוק כי העלינו בריבוע) נקבל את נקודות החיתוך $\left(0,\, e\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{1}{e}\right)$

ג. נמצאת את משוואת הישר: $m=\frac{e-\frac{1}{e}}{-\frac{3\pi}{2}}\approx-\frac{1}{2} \leftarrow y=-\frac{1}{2}x+e$

השטח המוגבל הוא: $S=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\left[-\frac{1}{2}x+e-f'\left(x\right)\right]dx=\left[-\frac{1}{4}x^2+ex+f\left(x\right)\right]_0^{\frac{3\pi}{2}}\approx 9.6$

פתרון שאלה 5

א. נגזור ונקבל: $f'(x)=e^{-x^2}-2x\cdot(x+a)\cdot e^{-x^2}=-e^{-x^2}\cdot(2x^2+2ax-1)$

השוואת הנגזרת ל – 0 נותנת $x^2+ax-0.5=0$.

למשוואה הריבועית שהתקבלה יש שני שורשים שונים כי $\Delta=a^2+2>0$.

ב. (I) נמצא את פתרונות המשוואה הריבועית: $x_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+2}}{2}$

נרשום $x_1-x_2=\frac{-a+\sqrt{a^2+2}}{2}-\frac{-a-\sqrt{a^2+2}}{2}=\sqrt{a^2+2}$

נשווה לנתון ונקבל $\sqrt{a^2+2}=1\frac{1}{2} \leftarrow a_1=\frac{1}{2}\ ,\ a_2=-\frac{1}{2}$

(II) הצבת $a=-0.5$, $f(x)=(x-0.5)\cdot e^{-x^2}$

$f'(x)=-e^{-x^2}\cdot(2x^2-x-1)$.

נקודות הקיצון מתקבלות עבור $2x^2-x-1=0$. מקבלים: $x_1=1\ ,\ x_2=-\frac{1}{2}$.

לאחר הצבה בפונקציה ובדיקת סוגי הנקודות מקבלים $(-0.5,-e^{-0.25})_{\min}\ ,\ (1,\ 0.5e^{-1})_{\max}$.

(III) חיתוך ציר X: $(x-0.5)\cdot e^{-x^2}=0 \leftarrow x=0.5$

חיתוך ציר Y: $f(0)=(0-0.5)\cdot e^0=-0.5$

נקודות החיתוך הן: $(0,-0.5)\ ,\ (0.5,0)$.

(IV) $\lim_{x\to\pm\infty} f\left(x\right)=\frac{\pm\infty}{\infty}$

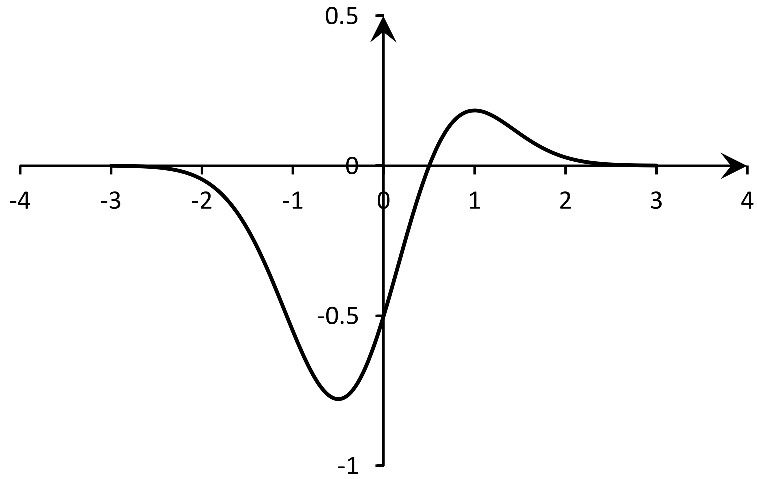
גבול מסוג זה ניתן לפתור על ידי גזירה של המונה והמכנה בנפרד ובדיקה 'מחודשת' של הגבול המתקבל

(כלל זה נקרה כלל לופיטל).

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-0.5}{e^{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(x-0.5\right)'}{\left(e^{x^2}\right)'}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2x\cdot e^{x^2}}=0$$

האסימפטוטה האופקית היא $y=0$.

ג.



פתרון שאלה 1

א) נציב $y=ax+b$ במשוואת הפרבולה: $(ax+b)^2=2px$. הישר עובר במוקד הפרבולה, לכן $b=-\frac{1}{2}ap$.

לאחר הצבה ופתיחת סוגריים נקבל את המשוואה הריבועית $a^2x^2-p\left(a^2+2\right)x+\frac{1}{4}p^2a^2=0$.

פתרון המשוואה: $x_{1,2}=\dfrac{p\left(a^2+2\right)\pm 2p\sqrt{a^2+1}}{2a^2}$

$a>0$ ונקודה A נמצאת ברביע הראשון לכן שיעור ה – X שלה הוא $x_A=\dfrac{p}{a^2}\left(\frac{1}{2}a^2+1+\sqrt{a^2+1}\right)$

ושיעור ה – Y הוא $y_A=\dfrac{p}{a}\left(1+\sqrt{a^2+1}\right)$.

תשובה: $A\left(\dfrac{p}{a^2}\left(\frac{1}{2}a^2+1+\sqrt{a^2+1}\right),\dfrac{p}{a}\left(1+\sqrt{a^2+1}\right)\right)$

ב) שיעורי אמצע הקטע AC הם $D\left(\dfrac{p}{2a^2}\left(\frac{1}{2}a^2+1+\sqrt{a^2+1}\right),\dfrac{p}{a}\left(1+\sqrt{a^2+1}\right)\right)$

נרשום את $\dfrac{y_D^2}{x_D}$ ונקבל: $\dfrac{y_D^2}{x_D}=\dfrac{\frac{p^2}{a^2}\left(1+\sqrt{a^2+1}\right)^2}{\frac{p}{2a^2}\left(\frac{1}{2}a^2+1+\sqrt{a^2+1}\right)}=4p$

ומשוואת המקום הגיאומטרי היא $y^2=4px$.

פתרון שאלה 2

א) בסיס הפירמידה נמצא במישור XY לכן נפתור סעיף זה בכלים של גיאומטריה אנליטית.

מפגש האלכסונים של בסיס הפירמידה: $F(5,4,0)$ (אלו גם שיעורי ה – X וה – Y של קודקוד S).

שיפוע האלכסון AC: $3 = \frac{1-7}{4-6} = m_{AC}$. שיפוע האלכסון BD: $m_{BD} = -\frac{1}{3}$.

משוואת האלכסון BD: $y = -\frac{1}{3}x + 5\frac{2}{3}$.

אורך מחצית האלכסון: $\sqrt{10} = \sqrt{(6-5)^2 + (7-4)^2} = d_{CF}$

נמצא עתה את הנקודות על הישר BD שמרחקן מנקודה F הוא $\sqrt{10}$ (נקודות אלו הן הקודקודים B ו – D).

$\sqrt{10} = \sqrt{(x-5)^2 + \left(-\frac{1}{3}x + 5\frac{2}{3} - 4\right)^2}$.

נקבל: $x_B = 8$, $x_D = 2$, נציב במשוואת BD ונקבל את שיעורי ה – Y של שני הקודקודים.

תשובה: $S(5,4,5)$, $B(8,3,0)$, $D(2,5,0)$

ב) משוואת מישור ABS: נרשום $ax+by+cz+d=0$ ונציב את נקודות A , B ו – S, נקבל:

$$\begin{cases} 4a+b+d=0 \\ 8a+3b+d=0 \\ 5a+4b+5c+d=0 \end{cases}$$

פתרון מערכת המשוואות נותן: $\pi_{ABS}: \quad x-2y+z-2=0$

משוואת מישור BCS: נרשום $ax+by+cz+d=0$ ונציב את נקודות B , C ו – S, נקבל:

$$\begin{cases} 8a+3b+d=0 \\ 6a+7b+d=0 \\ 5a+4b+5c+d=0 \end{cases}$$

פתרון מערכת המשוואות נותן: $\pi_{BCS}: \quad 2x+y+z-19=0$

ג) הזווית בין הפאות ABS ו – BCS:

נמצא את הזווית בין וקטורי הכיוון של המישורים $(2,1,1)$, $(1,-2,1)$.

$\frac{1}{6} = \frac{(1,-2,1)\cdot(2,1,1)}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \cos\alpha$, ונקבל $\alpha = 80.4^0$.

הזווית בין הפאות משלימה לזווית שטוחה ולכן שווה ל - 99.6^0 .

ד) וקטור הכיוון BS הוא: $\overrightarrow{BS} = (-3,1,5)$,

שיעור נקודה E הם: $E(8-3t,3+t,5t)$,

ווקטור הכיוון של DE הוא: $\overrightarrow{DE} = (6-3t,-2+t,5t)$,

מתקיים: $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BS} = 0 \leftarrow (-3,1,5)\cdot(6-3t,-2+t,5t) = 0 \leftarrow t = \frac{4}{7}$

ושיעורי נקודה E הם: $E\left(6\frac{2}{7},3\frac{4}{7},2\frac{6}{7}\right)$.

פתרון שאלה 3

א) נרשום $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$. נציב ונקבל:

$$\left|\frac{z-iz}{z+i\bar{z}}\right|=\left|\frac{x+iy-ix+y}{x+iy+ix+y}\right|=\left|\frac{(x+y)+i(y-x)}{(x+y)+i(y+x)}\right|=$$

$$=\frac{|(x+y)+i(y-x)|}{|(x+y)+i(y+x)|}=\frac{\sqrt{(x+y)^2+(y-x)^2}}{\sqrt{(x+y)^2+(y+x)^2}}=\frac{\sqrt{2(x^2+y^2)}}{(x+y)\cdot\sqrt{2}}$$

נשווה לנתון ונקבל: $\frac{\sqrt{2(x^2+y^2)}}{(x+y)\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \leftarrow y=x$

תשובה: המקום הגיאומטרי הוא הישר $y=x$.

ב) המרחק המינימאלי הוא מרחק הנקודה $(2,1)$ מהישר $x-y=0$: $d=\left|\frac{2-1}{\sqrt{2}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

פתרון שאלה 4

א) $c>0$ לכן $x^2+c>0$, נדרוש: $x+\sqrt{x^2+c}>0$ ונקבל כל X.

ב) $f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+c}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+c}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+c}}$

ג) $g(x)$ חיובית לכל X.

$$\int_{-c}^{c}g(x)dx=\int_{-c}^{c}\frac{1}{\sqrt{x^2+c}}dx=\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+c}\right)\right]_{-c}^{c}=\ln\left(c+\sqrt{c^2+c}\right)-\ln\left(-c+\sqrt{c^2+c}\right)=\ln\frac{c+\sqrt{c^2+c}}{-c+\sqrt{c^2+c}}$$

נשווה את הביטוי שקבלנו ל – 1: $\ln\frac{c+\sqrt{c^2+c}}{-c+\sqrt{c^2+c}}=1 \leftarrow \frac{c+\sqrt{c^2+c}}{-c+\sqrt{c^2+c}}=e$.

פתרון המשוואה האחרונה נותן $c=\frac{(e-1)^2}{4e}$

פתרון שאלה 5

זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי מתקבל מהביטוי $\frac{1}{2}m_0 = m_0 \cdot q^T$.

חילוץ T מהמשוואה נותן: $T = \frac{\ln 0.5}{\ln q}$

עבור חומר א': $T = \frac{\ln 0.5}{\ln q_A}$,   עבור חומר ב': $T_B = 3T = \frac{\ln 0.5}{\ln q_B}$

משתי המשוואות נקבל $q_A = q_B^3$.

נרשום עתה משוואה המתארת את הכמות הכוללת כתלות בזמן: $m_t = m_0 \cdot q_A^t + m_0 \cdot q_B^t$

נציב $m_t = m_0$ וכן $q_A = q_B^3$ ונקבל: $m_0 = m_0 \cdot q_B^{3t} + m_0 \cdot q_B^t \leftarrow \left(q_B^t\right)^3 + q_B^t - 1 = 0$

מהתבוננות בגרף המצורף נראה כי פתרון המשוואה הוא $q_B^t = 0.68$

נקבל $t = \frac{\ln 0.68}{\ln q_B} = \frac{3T \cdot \ln 0.68}{\ln 0.5} = 1.669 \cdot T$

תשובה: כעבור $1.669 \cdot T$ תיוותר כמות של m_0 משני החומרים יחד.

פתרון שאלה 1

הנקודה E היא אמצע האלכסון BD, לכן: $\begin{cases} x_B + x_D = 2x_E \\ y_B + y_D = 2y_E \end{cases} \leftarrow \begin{cases} x_B + x_D = 1 \\ y_B + y_D = 3 \end{cases} \xleftarrow{\wedge 2} \begin{cases} x_B^2 + x_D^2 + 2x_B x_D = 1 \\ y_B^2 + y_D^2 + 2y_B y_D = 9 \end{cases}$

לאחר חיבור שתי המשוואות ושימוש בנתון $x_B^2 + y_B^2 = 80$, $x_D^2 + y_D^2 = 50$, נקבל: $x_B x_D + y_B y_D = -60$.

נציב $x_D = 1 - x_B$, $y_D = 3 - y_B$ ונקבל

$$x_B(1 - x_B) + y_B(3 - y_B) = -60 \rightarrow x_B + 3y_B = -60 + x_B^2 + y_B^2 \rightarrow x_B + 3y_B = 20 \rightarrow x_B = 20 - 3y_B$$

נציב עתה במשוואת המעגל עליו נמצא קודקוד B ונקבל $(20 - 3y_B)^2 + y_B^2 = 80$.

לאחר פתיחת סוגריים וסידור נקבל $y_B^2 - 12y_B + 32 = 0$ $(*)$. פתרונות המשוואה ומציאת x_B (נזכור בנוסף כי קודקוד B נמצא ברביע הראשון) נותנים $B(8,4)$.

קודקוד D יתקבל מהקשרים לעיל ($x_D = 1 - x_B$, $y_D = 3 - y_B$), נקבל: $D(-7,-1)$.

קודקוד C התקבל למעשה בשלב הקודם והוא הפתרון השני של משוואה $(*)$. נקבל: $C(-4,8)$

וקודקוד A הוא $A(5,-5)$

תשובה: קודקודי המלבן הם: $A(5,-5)$, $B(8,4)$, $C(-4,8)$, $D(-7,-1)$

פתרון שאלה 2

א) $|w|-iw-1+5i=0$

נרשום $w=a+ib$ ונקבל: $\sqrt{a^2+b^2}-ia+b-1+5i=0 \leftarrow \sqrt{a^2+b^2}+b-1+i(5-a)=0$

התקבל מספר מרוכב שחלקו הממשי שווה ל – 0 וחלקו המדומה שווה ל – 0: $\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}+b-1=0\\5-a=0\end{cases}$

פתרון מערכת המשוואות נותן $w=5-12i$.

ב) $z^4-w^2=0 \leftarrow (z^2+w)\cdot(z^2-w)=0$

ונקבל: $z^2=w$ או $z^2=-w$

נרשום $z=x+iy$

עבור $z^2=w$ נקבל: $(x+iy)^2=5-12i \leftarrow x^2-y^2+2ixy=5-12i$

השוואה של חלקים מדומים וממשיים נותנת $\begin{cases}x^2-y^2=5\\xy=-6\end{cases} \leftarrow x=\pm3\ ,\ y=\mp2$

עבור $z^2=-w$ נקבל: $(x+iy)^2=-5+12i \leftarrow x^2-y^2+2ixy=-5+12i$

השוואה של חלקים מדומים וממשיים נותנת $\begin{cases}x^2-y^2=-5\\xy=6\end{cases} \leftarrow x=\pm2\ ,\ y=\pm3$

תשובה: $z_1=3-2i\ ,\ z_2=-3+2i\ ,\ z_3=2+3i\ ,\ z_4=-2-3i$

<u>פתרון שאלה 3</u>

א) ΔBCS ש"ש כי $\Delta ABS \cong \Delta ACS$ (צ.ז.צ).

נסמן ב – D את אמצע BC ו - $\sphericalangle BCA = \sphericalangle CBA = \beta$.

כמו כן $SC = \sqrt{2}a$, לכן $SD = \sqrt{2a^2 - a^2\cos^2\beta} = a\sqrt{2-\cos^2\beta}$.

$\sin\alpha = \dfrac{AS}{SD} = \dfrac{a}{a\sqrt{2-\cos^2\beta}} = \dfrac{1}{\sqrt{2-\cos^2\beta}}$.

הערכים של β הם $0^0 < \beta < 90^0$.

עבור $\beta = 0^0$ נקבל $\sin\alpha = 1 \leftarrow \alpha = 90^0$

עבור $\beta = 90^0$ נקבל $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leftarrow \alpha = 45^0$

תשובה: $45^0 < \alpha < 90^0$

ב) (I) $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}a^2\sin\left(180^0 - 2\beta\right)\cdot a = \dfrac{\sqrt{5}-1}{24}a^3 \leftarrow \sin 2\beta = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

ונקבל $\beta = 81^0$ ו - $\sphericalangle BAC = 18^0$.

(II) $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2-\cos^2 81^0}} \leftarrow \alpha = 45.35^0$

(III) הזווית בין הפאות גדולה מ - 81^0 .

פתרון שאלה 4

א) (I) נגזור את הפונקציה $g(x)=\frac{e^{ax}}{a}\cdot\left(x-\frac{1}{a}\right)+C$

נקבל: $g'(x)=e^{ax}\cdot\left(x-\frac{1}{a}\right)+1\cdot\frac{e^{ax}}{a}=x\cdot e^{ax}$ כלומר $g'(x)=f(x) \leftarrow \int f(x)dx=g(x)$

(II) $\int_0^b x\cdot e^{ax}dx=\left[\frac{e^{ax}}{a}\cdot\left(x-\frac{1}{a}\right)\right]_0^b=\left[\frac{e^{ab}}{a}\cdot\left(b-\frac{1}{a}\right)\right]-\left[\frac{1}{a}\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)\right]=\frac{e^{ab}}{a^2}\cdot(ab-1)+\frac{1}{a^2}$

ב) $x_1\cdot e^{ax_1}-\frac{x_1}{a}=0 \leftarrow x_1\cdot\left(e^{ax_1}-\frac{1}{a}\right)=0 \leftarrow ax_1=-\ln a \leftarrow x_1=-\frac{\ln a}{a}$

נקודת החיתוך הימנית היא $\left(-\frac{\ln a}{a}\ ,\ 0\right)$

ג) (I) $g'(x)=e^{ax}\cdot(ax+1)-\frac{1}{a} \leftarrow g'\left(-\frac{\ln a}{a}\right)=e^{-\ln a}\cdot(-\ln a+1)-\frac{1}{a}$

לאחר סידור נקבל $g'\left(-\frac{\ln a}{a}\right)=\frac{1}{a}\cdot(-\ln a+1)-\frac{1}{a}=-\frac{\ln a}{a}$

(II) נשווה לנתון ונקבל: $-\frac{\ln a}{a}=10\cdot\ln 10 \leftarrow \frac{1}{a}\cdot\ln\frac{1}{a}=10\cdot\ln 10$

לכן $a=\frac{1}{10}$ הוא פתרון למשוואה.

(III) $\int_0^{x_1} g(x)dx=\int_0^{10\cdot\ln 10}\left(x\cdot e^{0.1x}-10x\right)dx=\left[10\cdot e^{0.1x}\cdot(x-10)-5x^2\right]_0^{10\ln 10}=-1248.4$

פתרון שאלה 5

א) תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא $x>0$.

ב) (I) נמצא את שיעורי ה – Y בנקודות הקיצון:

$$f'(x)=\ln x+1-2x\ln x(\ln x+1)=(\ln x+1)\cdot(1-2x\ln x)$$

השוואת הנגזרת ל – 0 נותנת: $(\ln x+1)\cdot(1-2x\ln x)=0$.

פתרונות המשוואה הם: $x_1=e^{-1}$ או $x_2\ln x_2=\frac{1}{2}$.

נמצא עתה את שיעורי ה – Y :

$$f(x_1)=f\left(e^{-1}\right)=\frac{1}{e}\cdot(-1)-\frac{1}{e^2}\cdot 1=-e^{-1}\cdot\left(1+e^{-1}\right)\ ,\quad f(x_2)=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

הערה: לא ניתן למצוא את x_2 אך ניתן למצוא את $f(x_2)$.

משוואות המשיקים הן: $y=-\frac{1}{e}\cdot\left(1+\frac{1}{e}\right)$, $y=\frac{1}{4}$

(II) $f(x)=0\ \leftarrow\ x\ln x\cdot(1-x\ln x)=0$

נקודת החיתוך השמאלית מתקבלת עבור $x\ln x=0\ \leftarrow\ \ln x=0\ \leftarrow\ x=1$

תשובה: $(1,0)$

ג) בנקודת החיתוך הימנית מתקיים $x_2\ln x_2=1$.

נמצא את משוואת המשיק בנקודה זו: $f'(x_2)=(\ln x_2+1)\cdot(1-2x_2\ln x_2)=-(\ln x_2+1)$

משוואת המשיק היא: $y-0=-(\ln x_2+1)\cdot(x-x_2)\ \leftarrow\ y=-(\ln x_2+1)x+x_2\ln x_2+x_2$

לאחר הצבת $x_2\ln x_2=1$ נקבל $y=-(\ln x_2+1)x+1+x_2$.

השוואת נקודת חיתוך ציר Y לנתון נותנת $x_2+1=2.763\ \leftarrow\ x_2=1.763$.

תשובה: נקודת החיתוך הימנית היא $(1.763,0)$.