



פתרון שאלה 1

נסמן: x – מהירות ההליכה של נועם.

y – מהירות ההליכה של יובל.

נועם	מהירות	זמן	דרך
	x	2.5	$2.5x$
יובל בתנועה	y	$\frac{A}{y}$	$2.5x + \frac{2}{5} \cdot 2.5x = A$
יובל במנוחה	–	$\frac{10}{60}$	–

משוואה I:

$$\frac{A}{y} + \frac{10}{60} = 2.5 \quad \text{נועם ויובל שהו במשך אותו זמן בדרך:}$$

$$\frac{2.5x + 2.5x \cdot \frac{2}{5}}{y} + \frac{1}{6} = 2.5 \quad \Bigg/ -\frac{1}{6}$$

$$\frac{2.5x + x}{y} = \frac{7}{3}$$

$$3.5x = \frac{7y}{3}$$

$$x = \frac{2}{3}y \quad \text{I}$$

נרכז את הנתונים על זמן תנועה לאורך קילומטר אחד בטבלה:

מהירות	זמן	דרך	
נועם	x	$\frac{1}{x}$	1
יובל	y	$\frac{1}{y}$	1

יובל עובר קילומטר אחד ב-5 דקות פחות מנועם.

כלומר: משוואה II:

$$\frac{1}{x} - \frac{5}{60} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{12} = \frac{1}{y} \quad / \cdot 12xy$$

$$12y - xy = 12x$$

נציב משוואה I במשוואה II:

$$12y - y\left(\frac{2}{3}y\right) = 12\left(\frac{2}{3}y\right)$$

$$12y - \frac{2y^2}{3} = 8y$$

$$4y - \frac{2y^2}{3} = 0 \quad / \cdot 3$$

$$12y - 2y^2 = 0$$

$$2y(6 - y) = 0$$

$$\swarrow \quad \searrow$$

$$y = 0 \quad y = 6$$

$$\downarrow$$

לא ייתכן

$$x = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$$

תשובה:

מהירות ההליכה של נועם: 4 קמ"ש.

מהירות ההליכה של יובל: 6 קמ"ש.

פתרון שאלה 2

א. בסדרה הנדסית נתון: $n = 12$

$$S_6 = 189 \text{ ראשונים החל ב-} a_1$$

$$S_6 = 12096 \text{ אחרונים החל ב-} a_7$$

$$\text{משוואה I: } \frac{a_1(q^6 - 1)}{q - 1} = 189$$

$$\text{משוואה II: } \frac{a_1 q^6 (q^6 - 1)}{q - 1} = 12096$$

נחלק משוואה II במשוואה I ונקבל:

$$\frac{a_1 q^6 (q^6 - 1)}{q - 1} : \frac{a_1 (q^6 - 1)}{q - 1} = \frac{12096}{189}$$

$$\frac{\cancel{a_1} q^6 (\cancel{q^6 - 1})}{\cancel{q - 1}} \cdot \frac{\cancel{q - 1}}{\cancel{a_1} (\cancel{q^6 - 1})} = 64$$

$$\text{לאחר צמצום נקבל: } q^6 = 64 \sqrt[6]{}$$

$$q = \pm 2$$

נציב במשוואה I לקבלת a_1 :

$$q = 2 \Rightarrow \frac{a_1(2^6 - 1)}{2 - 1} = 189 \Rightarrow a_1 = 3$$

$$q = -2 \Rightarrow \frac{a_1((-2)^6 - 1)}{-2 - 1} = 189 \Rightarrow a_1 = -9$$

תשובה: $a_1 = -9$ או $a_1 = 3$

נוסחה:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

ב. 1. נתונה הסדרה: $a_{n+1} = 3a_n + 5$ *

הסדרה b_n מוגדרת על-פי הנתון:

$$** \quad b_n = a_n + p$$

$$(1) \quad b_{n+1} = a_{n+1} + p \quad \text{כלומר:}$$

$$(2) \quad b_{n+1} = 3b_n \quad \text{וכמו כן בדרך נוספת:}$$

כלומר b_n הוא סדרה הנדסית אשר מנתה 3.

נשווה את הביטויים (1) ו-(2)

$$\underbrace{a_{n+1}}_* + p = 3 \cdot \underbrace{b_n}_{**} \quad \text{ונקבל:}$$

נציב על-פי הנתון:

$$3a_n + 5 + p = 3(a_n + p)$$

$$3a_n + 5 + p = 3a_n + 3p$$

$$5 = 2p$$

$$\boxed{2.5 = p}$$

$$2. \quad a_{12} + b_{12} = a_{12} + (a_{12} + p) = 2a_{12} + 2.5$$

$$2a_{12} + 2.5 = 568.5$$

$$2a_{12} = 566$$

$$\boxed{a_{12} = 283} \quad b_{12} = a_{12} + 2.5 = 285.5$$

פתרון שאלה 3

נסמן: A - מועמד עובר בהצלחה את מבחן הקבלה

B - מועמד עובר בהצלחה את הריאיון

א. 1. נתון: $P(A) = 0.62$ $P(B/A) = 0.8$ $\Leftrightarrow \frac{P(B \cap A)}{0.62} = 0.8$

$\Downarrow$

$$P(B \cap A) = 0.496$$

תשובה: $P = 0.496$

2.
$$P\left(\begin{matrix} \text{לכל היותר} \\ \text{אחד יתקבל} \end{matrix}\right) = \binom{8}{0}(0.496)^0(0.504)^8 + \binom{8}{1}(0.496)^1(0.504)^7 =$$

$$= 0.00416 + 0.0327 = 0.0369$$

3.
$$P\left(\begin{matrix} \text{בדיוק} \\ \text{אחד} \\ \text{התקבל} \end{matrix} \middle/ \begin{matrix} \text{לכל היותר} \\ \text{אחד} \\ \text{התקבל} \end{matrix}\right) = \frac{0.0327}{0.0369} = 0.886$$

ב. נתון: $n = 5$ $P(B/A) = 0.8$

$$P\left(\begin{matrix} \text{לפחות אחד} \\ \text{יעבור ריאיון} \end{matrix}\right) = 1 - \binom{5}{0}(0.8)^0(0.2)^5 = 0.99968$$

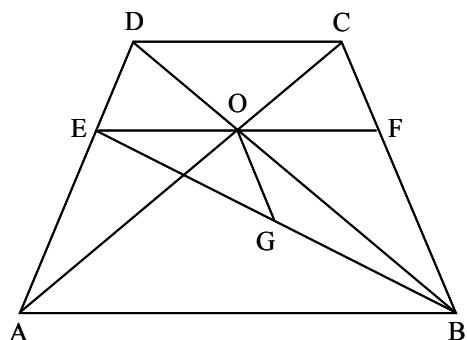
נוסחת ברנולי:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} P^k (1-P)^{n-k}$$

נוסחה:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

פתרון שאלה 4



א. $AB \parallel DC$ נתון

משפט תלס $\frac{DO}{OB} = \frac{CO}{OA}$

$\Downarrow$

$$\frac{DO}{DB} = \frac{CO}{CA}$$

נתון, המשכי מקבילים $EO \parallel AB$

$\Downarrow$

משפט תלס $\frac{EO}{AB} = \frac{DO}{DB}$

נתון, המשכי מקבילים $OF \parallel AB$

$\Downarrow$

משפט תלס $\frac{OF}{AB} = \frac{CO}{CA}$

$\Downarrow$

העברה $\frac{OE}{AB} = \frac{OF}{AB}$

גודל שווה לעצמו $AB = AB$

$\Downarrow$

מ.ש.ל. א. $EO = OF$

ב. $OG \parallel BC$ נתון

$\Downarrow$

$$EG = GB$$

קטע במשולש היוצא מאמצע צלע אחת ומקביל לשלישית
חוצה גם את הצלע השנייה.

ג. נתון:

$$DC = a$$



$$AB = 2a$$

יחסים על-פי משפט תלס

$$\frac{DC}{AB} = \frac{DO}{OB} = \frac{1}{2}$$



$$\frac{DO}{DB} = \frac{1}{3}$$

יחסים על-פי משפט תלס

$$\frac{EO}{AB} = \frac{DO}{DB}$$

$$\frac{EO}{2a} = \frac{1}{3}$$

$$EO = \frac{2a}{3}$$



על-פי סעיף א.

$$EO = OF = \frac{2a}{3}$$



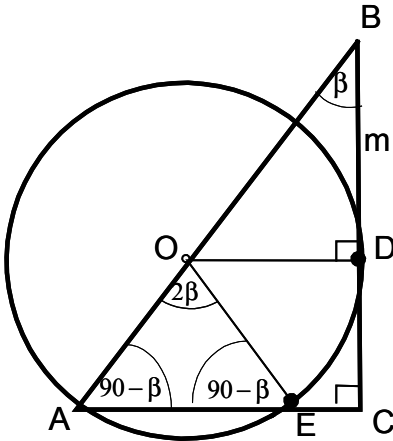
מ.ש.ל. ג.

$$EF = \frac{4a}{3}$$

פתרון שאלה 5

נתבונן ב- $\triangle BOD$.

$OD \perp BD$ - רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה.



$$\tan \beta = \frac{OD}{m}$$

$$OD = m \tan \beta$$

$$\cos \beta = \frac{m}{OB}$$

$$OB = \frac{m}{\cos \beta}$$

$AO = OD = OE$ - רדיוסים

לכן נקבל כי:

$$AB = AO + OB = m \tan \beta + \frac{m}{\cos \beta}$$

נתבונן ב- $\triangle AOE$.

על-פי משפט הסינוסים:

$$\frac{AE}{\sin 2\beta} = \frac{m \tan \beta}{\sin (90 - \beta)}$$

$$\sin (90 - \beta) = \cos \beta$$

$$AE = \frac{m \tan \beta \sin 2\beta}{\cos \beta} = \frac{2m \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \cdot \sin \beta \cos \beta}{\cos \beta} = \frac{2m \sin^2 \beta}{\cos \beta} = 2m \tan \beta \sin \beta$$

$$AE = 2m \tan \beta \sin \beta, \quad AB = m \tan \beta + \frac{m}{\cos \beta} \quad \text{תשובה:}$$

פתרון שאלה 6

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^4 + ax^2}{(x^2 + 1)^2}$

א. נמצא את שיפוע המשיק כאשר $x = 1$

$$f'(x) = \frac{(4x^3 + 2ax)(x^2 + 1)^2 - 4x(x^2 + 1)(x^4 + ax^2)}{(x^2 + 1)^4}$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \frac{4(4 + 2a) - 8(1 + a)}{16} = \frac{1}{2} \\ &= \frac{16 + 8a - 8 - 8a}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

שיפוע המשיק הוא $\frac{1}{2}$ והוא אינו תלוי ב- a .

ב. נמצא את משוואת המשיק כאשר $x = 1$

$$f(1) = \frac{1+a}{4} \qquad y - \frac{1+a}{4} = \frac{1}{2}(x-1)$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1+a}{4}$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{a-1}{4}$$

$$\frac{a-1}{4} = \frac{1}{2} \Leftarrow \text{המשיק פוגש את ציר ה-} y$$

$$\boxed{a=3}$$

$$\text{משוואת המשיק: } y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

ג. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

$$g'(x) = \frac{3x^2(x^2 + 1) - 2x(x^3)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{(x^2 + 1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

כלומר:

$$\int f(x) dx = g(x)$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \left. \frac{x^3}{x^2 + 1} \right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) dx = \left. \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$S = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ מבוקש}$$

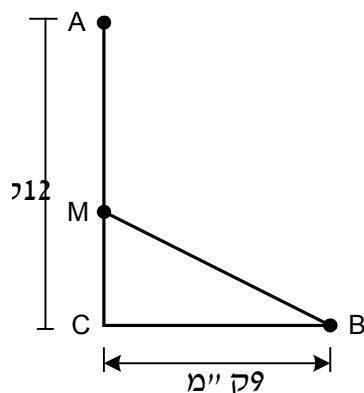
פתרון שאלה 7

נסמן: $CM = x$ ומכאן: $AM = 12 - x$

נתון: 9 ק"מ BC , לכן, על-פי משפט פיתגורס ב- $\triangle BCM$: $MB = \sqrt{x^2 + 81}$.

נסמן: y – המסלול BMA כפונקציה של זמן:

מהירות	זמן	דרך	
V	$\frac{\sqrt{x^2 + 81}}{V}$	$\sqrt{x^2 + 81}$	$B \rightarrow M$
$2.6V$	$\frac{12 - x}{2.6V}$	$12 - x$	$M \rightarrow A$



$$y = \frac{\sqrt{x^2 + 81}}{V} + \frac{12 - x}{2.6V}$$

נגזור לקבלת מינימום:

$$y' = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}V\sqrt{x^2 + 81}} - \frac{1}{2.6V} = 0$$

$$2.6Vx - V\sqrt{x^2 + 81} = 0 \quad / : V > 0$$

$$2.6x = \sqrt{x^2 + 81} \quad / ()^2$$

$$6.76x^2 = x^2 + 81$$

$$5.76x^2 = 81 \quad / : 5.76$$

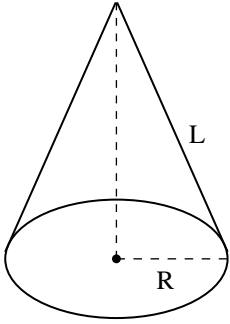
$$x^2 = 14.0625 \quad / \sqrt{}$$

$$x = 3.75$$

בדיקת מינימום:

x	$0 < x < 3.75$	3.75	$x > 3.75$
y'	-	מינימום	+
y	$\searrow$		$\nearrow$

תשובה: הנקודה M צריכה להימצא במרחק 3.75 ק"מ מהנקודה C , כדי שזמן הנסיעה של הג'יפ יהיה מינימלי.



פתרון שאלה 8

א. x - גובה החרוט

$$R^2 = L^2 - x^2 \quad \text{ריבוע רדיוס המעגל (פיתגורס):}$$

$$V = \frac{\pi R^2 \cdot x}{3} \quad \text{נפח החרוט:}$$

$$V(x) = \frac{\pi}{3} (L^2 x - x^3)$$

$$V'(x) = \frac{\pi}{3} [L^2 - 3x^2] = 0$$

$$3x^2 = L^2$$

$$x^2 = \frac{L^2}{3} \quad / \sqrt{\quad}$$

$$x = \pm \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$V''(x) = \frac{\pi}{3} [-6x]$$

$$\text{לכן מקסימלי.} \quad V''\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{3} \cdot \frac{6L}{\sqrt{3}} < 0$$

$$\frac{L}{\sqrt{3}} \quad \text{תשובה: גובה החרוט:}$$

ב. נסמן: $\angle ABO = x$

$$\sin x = \frac{AO}{L} \quad \cos x = \frac{OB}{L}$$

$$AO = L \sin x \quad OB = L \cos x$$

$$V(x) = \frac{\pi}{3} (L \cos x)^2 \cdot L \sin x = \frac{\pi L^3}{3} \cdot \cos^2 x \sin x$$

$$V'(x) = \frac{\pi L^3}{3} [-2 \cos x \sin^2 x + \cos^3 x] = 0$$

$$\cos x [-2 \sin^2 x + \cos^2 x] = 0$$

$$\cos x = 0 \quad 2 \sin^2 x = \cos^2 x$$

$$x = 90^\circ + 180k \quad \tan^2 x = \frac{1}{2}$$

$$x = 90^\circ \quad \tan x = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

לא יתכן

x זווית חדה

$$x = 35.26^\circ$$

תשובה: 35.26°

נבדוק מקסימום באמצעות טבלה

x		35.26°	
$V'(x)$	+		-
$V(x)$		מקסימום	

ג. נבטא את נפח הגוף עבור $x = \frac{L}{\sqrt{3}}$

$$V(x) = \frac{\pi}{3} \left[L^2 \cdot \frac{L}{\sqrt{3}} - \left(\frac{L}{\sqrt{3}} \right)^3 \right] = \frac{\pi L^3}{3} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{(\sqrt{3})^3} \right] = 0.128\pi L^3$$

נפח הגוף עבור $x = 35.26^\circ$

$$V(x) = \frac{\pi L^3}{3} \left[(\cos 35.26)^\circ \cdot \sin 35.26 \right] = 0.128\pi L^3$$

תשובה: $0.128\pi L^3$



פתרון שאלה 1

נסמן:

x – הזמן הדרוש לצינור א כדי למלא לבדו את הבריכה.

$3x$ – הזמן הדרוש לצינור ב כדי למלא לבדו את הבריכה.

$3.75x$ – $80\% : 3x$ – הזמן הדרוש לצינור ג כדי למלא לבדו את הבריכה.

$\frac{1}{x}$ – הספק לשעה של צינור א.

$\frac{1}{3x}$ – הספק לשעה של צינור ב.

$\frac{1}{3.75x}$ – הספק לשעה של צינור ג.

עבודה	הספק (בשעה)	זמן	
$\frac{5}{x}$	$\frac{1}{x}$	5	צינור א
$\frac{5}{3x}$	$\frac{1}{3x}$	5	צינור ב
$\frac{5}{3.75x}$	$\frac{1}{3.75x}$	5	צינור ג

המשוואה:

$$\frac{5}{x} + \frac{5}{3x} + \frac{5}{3.75x} = 1$$

$$\frac{5}{x} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.75} \right) = 1$$

$$\frac{5}{x} \cdot 1.6 = 1$$

$$\frac{8}{x} = 1 \quad / \cdot x$$

$$\boxed{x = 8}$$

תשובה:

הזמן הדרוש לצינור א כדי למלא לבדו את הבריכה: 8 שעות.
הזמן הדרוש לצינור ב כדי למלא לבדו את הבריכה: 24 שעות.
הזמן הדרוש לצינור ג כדי למלא לבדו את הבריכה: 30 שעות.

פתרון שאלה 2

א. 1. נתון $a_{n+1} = a_n + 4$, כלומר a_n הוא סדרה חשבונית שהפרשה הוא 4.

על-פי הכלל נבטא את a_{n+2} באמצעות a_n .

$$b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} \quad \text{נתון: } a_{n+2} = a_{n+1} + 4 = a_n + 4 + 4 = a_n + 8$$

$$\boxed{b_n = 3a_n + 12} \Leftrightarrow b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = a_n + a_n + 4 + a_n + 8 = 3a_n + 12 \quad \text{כלומר, } b_1 = 27$$

$$\boxed{b_{n+1} = 3a_{n+1} + 24} \Leftrightarrow b_{n+1} = 3a_{n+1} + 12 = 3(a_n + 4) + 12 = 3a_n + 24$$

נוכיח כי b_n הוא סדרה חשבונית:

$$b_{n+1} - b_n = 3a_{n+1} + 24 - 3a_n - 12 = 12$$

הפרש הסדרה b_n הוא 12,

$$\text{נתון: } a_1 = 5, b_1 = 3a_1 + 12 = 27$$

תשובה: $b_1 = 27$

2. נוסחה ל- b_n כפונקציה של n :

$$b_n = 27 + (n - 1)12$$

$$b_n = 12n + 15$$

3. נתון $a_n = 81$, כלומר $81 = 5 + (n - 1)4$

מפתרון המשוואה נקבל: $\boxed{n = 20}$

$$S_{20} = \frac{20}{2} [2 \cdot 27 + 19 \cdot 12] = 2820$$

נוסחה:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

נוסחה:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n - 1)d]$$

ב. המכונת עברה דרך של 1860 במשך 5 ימים כלומר:

$$S_5 = 1860 \quad (1) \quad \text{משוואה}$$

$$1860 = \frac{a_1(q^5 - 1)}{q - 1}$$

ביומיים הראשונים עברה דרך הקטנה פי 4 מאשר ביומיים הבאים אחריהם.

$$4(a_1 + a_2) = a_3 + a_4 \quad (2) \quad \text{כלומר: משוואה}$$

$$4(a_1 + a_1q) = a_1q^2 + a_1q^3$$

נוציא גורם משותף משני צידי משוואה זו ונקבל:

$$4a_1(1+q) = a_1q^2(1+q) \quad \left/ \begin{array}{l} a_1 \neq 0 \\ 1+q \neq 0 \end{array} \right.$$

$$4 = q^2$$

$$q = \pm 2$$

מרחק אינו שלילי לכן $q = 2$

נציב $q = 2$ במשוואה (1) ונקבל:

$$1860 = \frac{a_1(2^5 - 1)}{2 - 1}$$

$$1860 = 31 \cdot a_1 \quad /:31$$

$$a_1 = 60$$

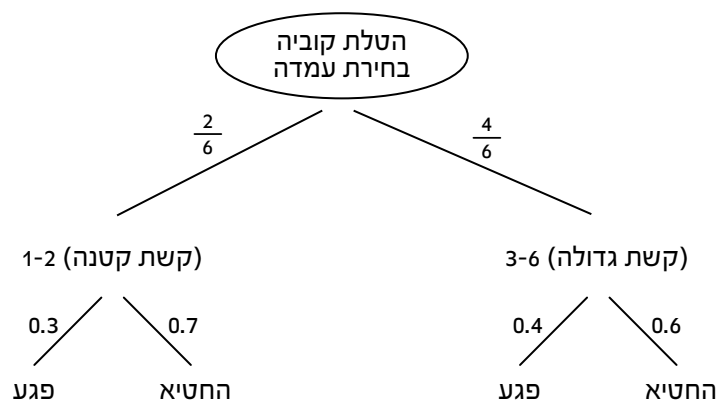
תשובה: המכונת עבר דרך של 60 ק"מ ביום הראשון.

נוסחאות:

$$a_n = a_1q^{n-1}$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

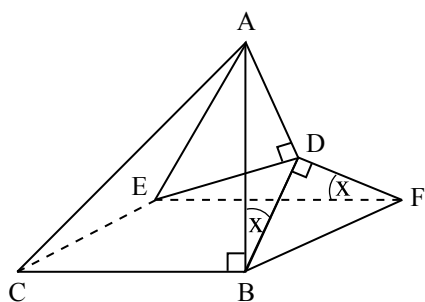
פתרון שאלה 3



$$P(\text{פגע}) = \frac{2}{6} \cdot 0.3 + \frac{4}{6} \cdot 0.4 = \frac{11}{30} \quad \text{א.}$$

$$P\left(\frac{\text{קשת קטנה}}{\text{פגע}}\right) = \frac{\frac{2}{6} \cdot 0.3}{\frac{11}{30}} = \frac{3}{11} \quad \text{ב.}$$

פתרון שאלה 4



א. צ"ל: $AB = EF$

הוכחה: נתבונן ב- $\triangle ADB$ וב- $\triangle EDF$

נתון משולש שווה-שוקיים $AD = DE$

נתון משולש שווה-שוקיים $BD = DF$

הצבה $\angle EDB = \alpha$

נתון משולש ישר-זווית $\angle BDF = \angle ADE = 90^\circ$

$\Downarrow$

סכום זוויות $\angle ADB = \angle EDF = 90^\circ + \alpha$

$\Downarrow$

(צ.ז.צ) $\triangle ADB \cong \triangle EDF$

$\Downarrow$

צלעות מתאימות במשולשים חופפים $AB = EF$

ב. $\angle ABC = 90^\circ$ נתון

הצבה + זוויות מתאימות במשולשים חופפים $\angle DFE = \angle DBA = x$

נתון משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים $\angle DFB = \angle FBD = 45^\circ$

$\Downarrow$

חיסור זוויות $\angle BFE = 45^\circ - x$

חיבור זוויות $\angle CBF = 90^\circ + x + 45^\circ = 135^\circ + x$

$\Downarrow$

$\angle CBF + \angle BFE = 180^\circ$

ג. מתוצאות סעיף ב' נקבל

זוויות חד-צדדיות שסכומן 180° $EF \parallel CB$

הוכח בסעיף א'. $AB = EF$

נתון $AB = CB$

$\Downarrow$

כלל המעבר $EF = CB$

$\Downarrow$

מקבילית, אם במרובע זוג צלעות נגדיות מקבילות ושוות המרובע הוא מקבילית. $BCEF$

פתרון שאלה 5

א. נתון: $AB=AC$

$$\angle BCA = \alpha$$

$$AF = a$$

בניית עזר: נחבר את A ל- D (המשך BF) על המעגל.

$$\angle BAD = 90^\circ - \text{זווית היקפית הנשענת על קוטר}$$

$$\angle ADB = \angle BCA = \alpha - \text{זוויות היקפיות על אותה קשת}$$

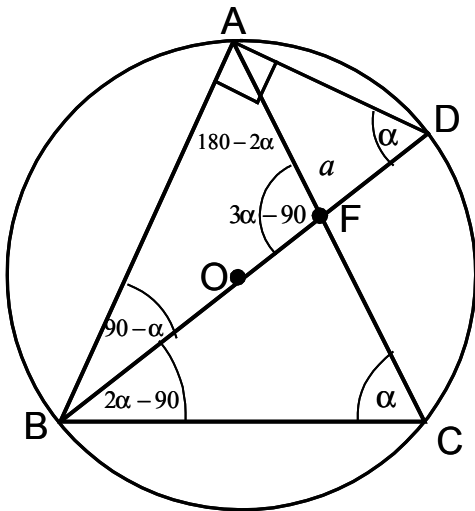
$$\angle BAC = 180 - 2\alpha - \text{סכום זוויות ב-} \triangle ABC$$

$$\angle ABD = 90 - \alpha - \text{סכום זוויות ב-} \triangle ABD$$

$$\angle DBC = 2\alpha - 90 - \text{סכום זוויות ב-} \triangle ABC$$

$$\angle AFB = 3\alpha - 90 - \text{זווית חיצונית ל-} \triangle BFC$$

נתבונן ב- $\triangle AFB$:



זהויות

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\sin(90 - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\frac{a}{\sin(90 - \alpha)} = \frac{AB}{\sin(3\alpha - 90)}$$

$$AB = \frac{a \sin(3\alpha - 90)}{\sin(90 - \alpha)} \Rightarrow AB = \frac{-a \sin(90 - 3\alpha)}{\cos \alpha}$$

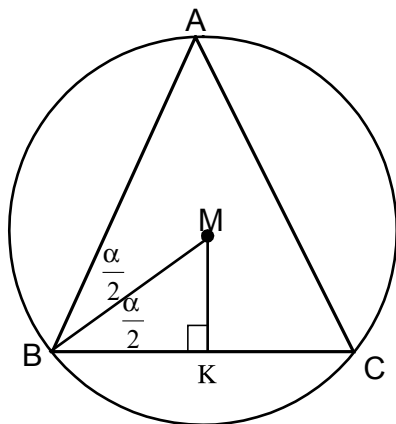
$$\Rightarrow AB = \frac{-a \cos 3\alpha}{\cos \alpha}$$

נתבונן ב- $\triangle BAC$:

$$\frac{AB}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\sin(180 - 2\alpha)}$$

$$BC = \frac{AB \sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{-a \cos 3\alpha}{\cos \alpha} \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$BC = -2a \cos 3\alpha$$



רדיוס המעגל החסום:

M – מרכז המעגל החסום הוא נקודת מפגש חוצי זוויות המשולש.

$$\angle ABM = \angle MBK = \frac{\alpha}{2} \Leftarrow$$

במשולש שווה-שוקיים מרכז המעגל החסום ומרכז המעגל החוסם נמצאים על הגובה לבסיס ולכן הוא גם תיכון.
נתבונן ב- $\triangle MBK$:

$$BK = \frac{1}{2} BC = -a \cos 3\alpha$$

MK – רדיוס המעגל החסום.

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{MK}{-a \cos 3\alpha}$$

$$MK = -a \cos 3\alpha \tan \frac{\alpha}{2}$$

ב. נתון: $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$

$$\frac{BC}{\sin(180 - 2\alpha)} = 2R \quad \text{נציב BC מסעיף א} \quad BC = -2a \cos 3\alpha \Rightarrow R = \frac{-a \cos 3\alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$r = MK = -a \cos 3\alpha \tan \frac{\alpha}{2} \quad \text{מסעיף קודם:}$$

נתון: $\frac{R}{r} = \frac{25}{12}$

כלומר: $\frac{R}{r} = \frac{-a \cos 3\alpha}{\sin 2\alpha} : -a \cos 3\alpha \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{-a \cos 3\alpha}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{1}{-a \cos 3\alpha \tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{25}{12}$

$$\frac{1}{\sin 2\alpha \cdot \tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = \frac{25}{12}$$

$$\sin 2\alpha = 0.96$$

$$\cos 2\alpha = \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = \sqrt{1 - 0.96^2} = \sqrt{0.0784} = 0.28$$

תשובה: $\cos 2\alpha = 0.28$

פתרון שאלה 6

א. נתונה הפונקציה: $y = \frac{bx-2}{\sqrt{ax^2-bx}}$.

על-פי הנתון, האסימפטוטות נחתכות בנקודה $(2,2)$, כלומר:

$x=2$ היא אסימפטוטה אנכית

$y=2$ היא אסימפטוטה אופקית.

נציב $x=2$ במכנה ונשווה לאפס:

$$a \cdot 2^2 - 2b = 0$$

$$4a = 2b$$

$$2a = b$$

נקבל משוואה I:

אסימפטוטה אופקית:

$$y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{bx-1}{\sqrt{ax^2-bx}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \left(b - \frac{1}{x} \right)}{\sqrt{x^2} \sqrt{a - \frac{b}{x}}} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} = \frac{b}{\sqrt{a}} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} = \frac{-b}{\sqrt{a}} \end{cases}$$

על-פי הנתון $\frac{b}{\sqrt{a}} = 2$, נקבל משוואה II, כלומר:

$$\begin{cases} b = 2\sqrt{a} \\ b = 2a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2a &= 2\sqrt{a} \quad / :2 \\ a &= \sqrt{a} \end{aligned}$$

$$\sqrt{a}(\sqrt{a}-1) = 0$$

$$\downarrow \quad \sqrt{a} = 1$$

$$a = 0$$

$$a = 1$$

$$b = 2$$

לא ייתכן

תשובה: $a=1$ $b=2$.

ב. הפונקציה: $f(x) = \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x}}$

תחום ההגדרה: $x^2 - 2x > 0$

$x < 0$ או $x > 2$

נמצא את נגזרת הפונקציה:

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2-2x} - (2x-2)\left(\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}\right)}{x^2-2x} =$$

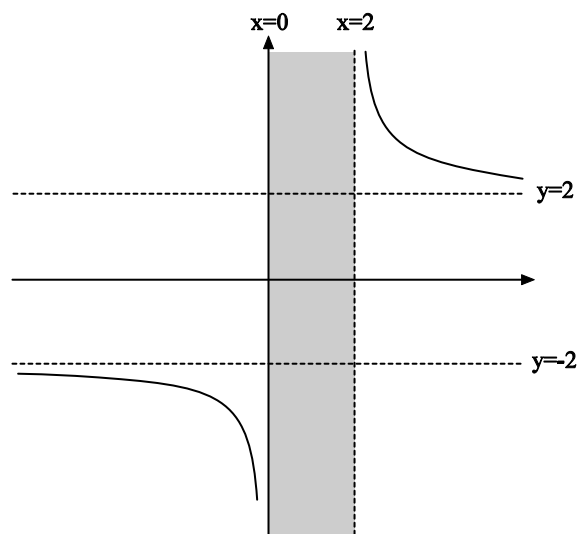
$$= \frac{4(x^2-2x) - (2x-2)(2x-2)}{2\sqrt{x^2-2x}(x^2-2x)} =$$

$$= \frac{4x^2 - 8x - 4x^2 + 4x + 4x - 4}{2\sqrt{x^2-2x}(x^2-2x)}$$

$$f'(x) = \frac{-4}{2\sqrt{x^2-2x}(x^2-2x)} < 0 \quad \text{לכל } x$$

המכנה ב- $f'(x)$ תמיד חיובי, לכן סימן הנגזרת תלוי במונה.

$-4 < 0$ לכל x , לכן הפונקציה יורדת לכל $x < 0$ או $x > 2$.



ג.

אסימפטוטות אופקיות: $y = \pm 2$

אסימפטוטה אנכית: $x = 0, 2$

הפונקציה יורדת לכל $x > 2$ או $x < 0$.

$$\int_4^8 \left(\frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x}} - 2 \right) dx = 2\sqrt{x^2-2x} - 2x \Big|_4^8 = \quad .ד$$

$$= 2\sqrt{48} - 16 - (2\sqrt{8} - 8) = 0.199$$

* אינטגרל באמצעות זיהוי נגזרת פנימית ונגזרת חיצונית או אינטגרל בהצבה:

$$u = x^2 - 2x$$

$$\frac{du}{dx} = 2x - 2$$

$$dx = \frac{du}{2x-2}$$

$$\int \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{u} + c$$

תשובה: השטח = 0.199.

פתרון שאלה 7

I.א נתון: x_0 נקודת מקסימום מקומי של $f(x)$.
כלומר נתון:

$$1. \quad f'(x_0) = 0$$

$$2. \quad f''(x_0) < 0$$

$$\text{נתון: } g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

נראה כי x_0 היא נקודת מינימום מקומי של $g(x)$.

$$g'(x) = \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2} \rightarrow g'(x_0) = \frac{-f'(x_0)}{[f(x_0)]^2} = 0$$

כלומר x_0 היא נקודה החשודה כקיצון.

$$g''(x) = -\underbrace{f''(x)}_{\text{שלילי}} \quad \text{סימן בלבד}$$

$$\text{נתון: } f''(x_0) < 0$$

$\Downarrow$

$$g''(x_0) > 0 \quad (\text{סימן בלבד})$$

כלומר x_0 נקודת מינימום מקומי.

II.א נתון: x_0 נקודת מינימום מקומי של $f(x)$.

כלומר נתון:

$$1. \quad f'(x_0) = 0$$

$$2. \quad f''(x_0) > 0$$

נראה כי x_0 היא מקסימום מקומי של $g(x)$.

$$\text{הראנו קודם כי } g'(x_0) = 0$$

נותר להראות כי $g''(x_0) < 0$

$$g''(x_0) = -\underbrace{f''(x_0)}_{\text{חיובי}}$$

$\Downarrow$

$$g''(x_0) < 0 \text{ סימן בלבד}$$

כלומר x_0 היא נקודת מקסימום מקומי של $g(x)$.

ב. נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$

נמצא נקודות קיצון: $f'(x) = 4x^3 - 4x = 0$

$$4x(x^2 - 1) = 0$$

$$\swarrow \\ x = 0$$

$$\downarrow \\ x = 1$$

$$\searrow \\ x = -1$$

הנקודות: $(0,5)$ $(1,4)$ $(-1,4)$

$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

$$(0,5) \leftarrow f''(0) = -4 < 0 \text{ נקודת מקסימום}$$

$$(1,4) \leftarrow f''(\pm 1) = 8 > 0 \text{ נקודת מינימום}$$

$\swarrow$

$$(-1,4) \text{ נקודת מינימום}$$

על פי סעיף א:

$$g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

נקבל: $\left(0, \frac{1}{5}\right)$ נקודת מינימום

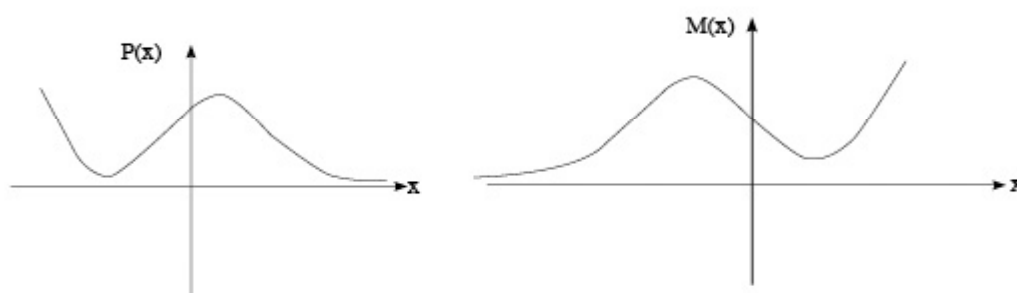
נקודות מקסימום. $\left(1, \frac{1}{4}\right), \left(-1, \frac{1}{4}\right)$

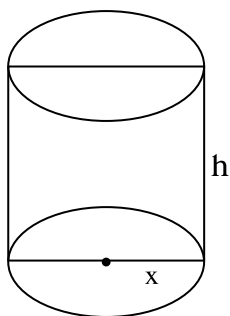
ג. על סמך סעיף א:

כמו כן נתון כי $P(x) > 0$ לכל x .

$P(x)$	$m(x)$
$\max(3, 5)$	$\min\left(3, \frac{1}{5}\right)$
$\min\left(-3, \frac{1}{5}\right)$	$\max(-3, 5)$

גרף אפשרי:





פתרון שאלה 8

נסמן ב- x את רדיוס הבסיס.

$$V = \pi R^2 \cdot h \quad \text{נפח הגליל:}$$

$$V = 108\pi \quad \text{נתון:}$$

$$\pi \cdot x^2 \cdot h = 108\pi \quad \text{כלומר:}$$

$$h = \frac{108}{x^2} \quad \text{נחלץ את } h:$$

$$P(x) = 2\pi x^2 + 2\pi \cdot x \cdot \frac{108}{x^2} \quad \text{שטח פני הגליל}$$

$$P(x) = 2\pi x^2 + \frac{216\pi}{x}$$

$$P'(x) = 4\pi x - \frac{216\pi}{x^2} = 0 \quad \text{נגזור לקבלת מינימום:}$$

$$4\pi x^3 = 216\pi \quad / : \pi$$

$$4x^3 = 216 \quad / : 4$$

$$x^3 = 54 \quad / \sqrt[3]{}$$

$$x = \sqrt[3]{54} = 3.77$$

$$P''(x) = 4\pi + \frac{432\pi}{x^3}$$

$$P''(3.77) > 0 \quad \text{ולכן מינימלי.}$$

תשובה: 3.77 ס"מ



פתרון שאלה 1

נסמן: x מהירות הנסיעה של רוכב האופניים.

y זמן הנסיעה עד הפגישה.

נרכז את נתוני השאלה בטבלה:

מהירות	זמן	דרך
$3x$	y	$3xy$
x	y	xy

משאית

אופניים

}

עד הפגישה

עד הפגישה נסעו רוכב האופניים ונהג המשאית את כל המרחק, כלומר:

$$3xy + xy = 240$$

$$4xy = 240 \quad / : 4$$

$$\boxed{xy = 60}$$



נשתמש בנתון זה לחישוב מרחק הנסיעה

↗

↘

משאית - $3xy = 3 \cdot 60 = 180$

אופניים - $xy = 60$

כלומר, עד הפגישה: נהג המשאית נסע 180 ק"מ.

רוכב האופניים נסע 60 ק"מ.

נשתמש בנתון זה לבניית טבלה המתארת את הדרך חזרה.

דורך	זמן	מהירות	
180	$\frac{180}{3x+20}$	$3x+20$	משאית
60	$\frac{60}{x-5}$	$x-5$	אופניים

המשוואה: האופניים היו $1\frac{3}{4}$ שעות יותר בדרך: $\frac{60}{x-5} = \frac{180}{3x+20} + 1\frac{3}{4}$

מכנה משותף $4(x-5)(3x+20)$

$$240(3x+20) = 720(x-5) + 7(x-5)(3x+20)$$

$$\cancel{720}x + 4800 = \cancel{720}x - 3600 + 21x^2 + 140x - 105x - 700$$

$$21x^2 + 35x - 9100 = 0 \quad / :7$$

$$3x^2 + 5x - 1300 = 0 \quad x = 20$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 125}{6} = \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix}$$

$$x = -21\frac{2}{3}$$

מהירות היא מספר חיובי.

תשובה: מהירות המשאית בהתחלה: $60 \text{ קמ"ש} = 3 \cdot 20$

פתרון שאלה 2

א. 1. נתון כי: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}$ כלומר: $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$,

a_n הוא סדרה הנדסית. מנת הסדרה $q = \frac{1}{3}$.

על-פי הכלל: $a_{n+2} = \frac{1}{3}a_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}a_n = \frac{1}{9}a_n$, נתון $b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$

$$\boxed{b_n = \frac{13}{9}a_n} \Leftrightarrow b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = a_n + \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{9}a_n = \frac{13}{9}a_n, \text{ כלומר,}$$

$$\boxed{b_{n+1} = \frac{13}{27}a_n} \Leftrightarrow b_{n+1} = \frac{13}{9}a_{n+1} = \frac{13}{9} \cdot \frac{1}{3}a_n = \frac{13}{27}a_n$$

נוכיח כי b_n הוא סדרה הנדסית:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{13}{27}a_n}{\frac{13}{9}a_n} = \frac{1}{3}$$

מנת הסדרה b_n היא $\frac{1}{3}$.

נתון: $a_1 = 2$

$$b_1 = \frac{13}{9}a_1 = \frac{26}{9}$$

2. נוסחה ל- b_n כפונקציה של n על-פי נוסחת האיבר בסדרה הנדסית

$$b_n = \frac{26}{9} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

נוסחה:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$\frac{2}{729} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} / :2 \text{ כלומר } a_n = \frac{2}{729} \quad 3.$$

$$\frac{1}{729} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \boxed{n=7}$$

נחשב על-פי נוסחת הסכום:

$$S_7 = \frac{\frac{26}{9} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^7 - 1 \right]}{\frac{1}{3} - 1} = 4.33$$

הערה: מאחר שמנת הסדרה b_n היא $\frac{1}{3}$ ניתן לחשב בקירוב את סכום האיברים ללא תלות במספר

האיברים על-פי נוסחת הסכום לסדרה הנדסית אינסופית יורדת, כלומר:

$$S = \frac{\frac{26}{9}}{1 - \frac{1}{3}} = 4.33$$

נוסחה:

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

ב. נתונה הסדרה $-54, -50, -46, \dots, 242$

1. $d = 4$, $a_n = 242$, $a_1 = -54$

$$242 = -54 + (n-1)4$$

$$242 = -54 + 4n - 4$$

$$4n = 300$$

$$n = 75$$

תשובה: בסדרה יש 75 איברים.

2. נמצא ערך של n שבו מתקיים $a_n < 0$

$$-54 + (n-1)4 < 0$$

$$-54 + 4n - 4 < 0$$

$$4n < 58$$

$$n < 14.5$$

↓

$n = 14$

בסדרה 14 איברים שליליים $a_{14} = -54 + 13 \cdot 4 = -2$

3. בסדרה 75 איברים, מהם 14 שליליים,

כלומר $75 - 14 = 61$ איברים חיוביים.

האיבר החיובי הראשון הוא $a_{15} = 2$

$$S_{61} = \frac{61}{2} [2 \cdot 2 + (61-1)4] = 7442$$

נוסחה:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

4. צריך להתקיים: $S_n > 120$

$$\frac{n}{2}[2(-54) + (n-1)4] > 120$$

$$\frac{n}{2}(-108 + 4n - 4) > 120$$

$$\frac{n}{2}(-112 + 4n) > 120$$

$$-56n + 2n^2 > 120$$

$$2n^2 - 56n - 120 > 0 \quad :2$$

$$n^2 - 28n - 60 > 0$$

$$(n-30)(n+2) > 0$$

$$n > 30 \text{ או } n < -2 \text{ n מספר טבעי}$$

↓

$$\boxed{n = 31}$$

$$S_{31} = \frac{31}{2}[2(-54) + 30 \cdot 4] = 186 > 120$$

נראה שעבור $n = 30$ מתקבל סכום שאינו גדול מ-120.

$$S_{30} = \frac{30}{2}[2(-54) + 29 \cdot 4] = 120$$

תשובה: $S_{31} = 186$, $n = 31$

פתרון שאלה 3

נסמן מאורעות:

A - עבר בהצלחה מבחן ראשון.

B - עבר בהצלחה מבחן שני.

נתון: $N(S) = 200$

$$N(A) = 80 \quad N(B) = 50$$

$$1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{17}{40} \quad \text{או} \quad P(A \cup B) = \frac{17}{40}$$

$\Downarrow$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{23}{40}$$

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{17}{40}$$

$$\frac{80}{200} + \frac{50}{200} - P(A \cap B) = \frac{17}{40}$$

$$P(A \cap B) = \frac{9}{40}$$

$$P(A \cap B) = \frac{9}{40} \quad \text{א.}$$

$$N(A \cap B) = \frac{9}{40} \cdot 200 \quad \text{ב.}$$

$$N(A \cap B) = 45$$

$$P(B / A) = \frac{\frac{9}{40}}{\frac{2}{5}} = \frac{9}{16} \quad \text{ג.}$$

$$P(\bar{A} / B) = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{10} \quad \text{ד.}$$

סה"כ	$\bar{A}$	A	
$\frac{50}{200} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{9}{40}$	B
$\frac{150}{200} = \frac{3}{4}$	$\frac{23}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\bar{B}$
1	$\frac{120}{200} = \frac{3}{5}$	$\frac{80}{200} = \frac{2}{5}$	סה"כ

פתרון שאלה 4

צ"ל: $BEDF$ ריבוע

הוכחה:

נתון $AB \parallel DC$

נתון $AD = BC$

$\Downarrow$

בטרפז שווה-שוקיים האלכסונים שווים. $AC = BD$

($\Delta ADC \cong \Delta BCD$)

נתון שהאלכסונים מאונכים $AC \perp BD$

$\Downarrow$

מתקבל משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים $\angle ACD = \angle BDC = 45^\circ$

נתון אנך אמצעי $\begin{cases} OE \perp DB \\ DO = OB \end{cases}$

$\Downarrow$

במשולש שווה-שוקיים הגובה מתלכד עם התיכון. ΔBDE

$\Downarrow$

$DE = BE$

חוצה-זווית הראש במשולש שווה-שוקיים $\angle OEB = \angle OED = 45^\circ$

$\Downarrow$

תיכון ליתר שווה למחצית היתר $DO = BO = OE$

זוויות מתאימות $FE \parallel AC$

המשכי מקבילים $AF \parallel EC$

$\Downarrow$

מקבילית, מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות מקבילות $AFEC$

$\Downarrow$

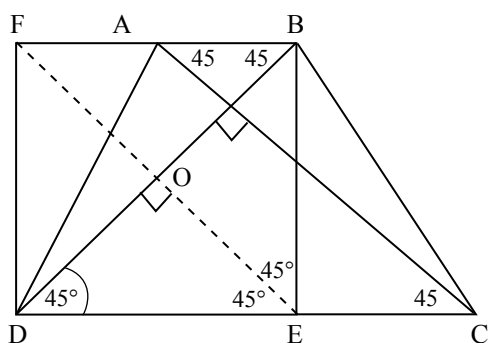
צלעות נגדיות במקבילית $FE = AC$

$\Downarrow$

כלל מעבר $BD = FE$

$\Downarrow$

בריבוע, האלכסונים מאונכים זה לזה, חוצים זה את זה ושווים זה לזה. $BEDF$



פתרון שאלה 5

נתבונן ב- $\triangle ADC$:

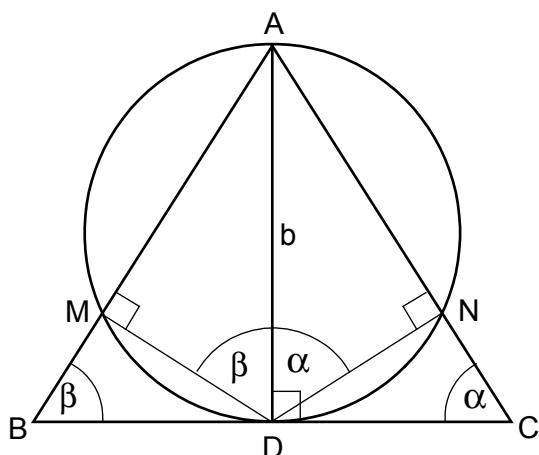
$$\cot \alpha = \frac{DC}{b}$$

$$DC = b \cot \alpha$$

נתבונן ב- $\triangle ADB$:

$$\cot \beta = \frac{BD}{b}$$

$$BD = b \cot \beta$$



או

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AD \cdot BC}{2} = \frac{b(b \cot \alpha + b \cot \beta)}{2} = \frac{b^2 (\cot \alpha + \cot \beta)}{2} \stackrel{א}{=} \frac{b^2 \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha \sin \beta}$$

$$\sphericalangle AND = \sphericalangle AMD = 90^\circ \quad \text{ב.}$$

משפט

1. זווית היקפית הנשענת על קוטר שווה ל- 90° .

2. סכום הזוויות הנגדיות במרובע חסום במעגל הוא 180° .

נתון: $\sphericalangle ADC = 90^\circ$, ולכן $\sphericalangle NDC = 90^\circ - \alpha$ ובאותו האופן $\sphericalangle MDB = 90^\circ - \beta$, מכאן:

$$\sphericalangle ADM = \beta \quad \text{ו-} \quad \sphericalangle ADN = \alpha \Leftarrow$$

אפשרות נוספת:

נתבונן ב- $\triangle ABC$: $\sphericalangle BAC = 180 - (\alpha + \beta) \Leftarrow$ לפי משפט 2, $\sphericalangle MDN = \alpha + \beta$

נתבונן ב- $\triangle AND$:

$$DN = b \cos \alpha \Leftarrow \cos \alpha = \frac{DN}{b}$$

נתבונן ב- $\triangle ADM$:

$$MD = b \cos \beta \Leftarrow \cos \beta = \frac{MD}{b}$$

$$S_{\Delta MND} = \frac{DN \cdot MD \cdot \sin \angle MDN}{2} = \frac{b \cos \alpha \cdot b \cos \beta \cdot \sin (\alpha + \beta)}{2}$$

נצמצם בהתאם

$$\text{יחס השטחים} = \frac{\Delta MND}{\Delta ABC} = \frac{\frac{1}{2} (b^2 \cos \alpha \cos \beta \sin (\alpha + \beta))}{\frac{1}{2} \left(b^2 \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} \right)} =$$

$$= \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta = \frac{\sin 2\alpha \sin 2\beta}{4}$$

↓

על-פי נוסחה לזווית כפולה

פתרון שאלה 6

א. נתונה הפונקציה $f(x) = (2x - x^m)^m$.

נתון $f'(1) = -15$

$$f'(x) = m(2x - x^m)^{m-1} \cdot (2 - mx^{m-1})$$

$$f'(1) = m(2 - 1^m)^{m-1} \cdot (2 - m \cdot 1^{m-1}) = -15$$

$$1^{m-1} = 1^m = 1 \quad \text{שים לב:}$$

$$m(2 - m) = -15$$

$$m^2 - 2m - 15 = 0$$

$$(m - 5)(m + 3) = 0$$

$$m = 5 \quad \text{תשובה: } m = -3$$

ב. הפונקציה: $f(x) = (2x - x^{-3})^{-3}$

$$f(x) = \left(2x - \frac{1}{x^3}\right)^{-3} = \left(\frac{2x^4 - 1}{x^3}\right)^{-3}$$

$$f(x) = \left(\frac{x^3}{2x^4 - 1}\right)^3$$

$$2x^4 \neq 1 \quad \text{תחום ההגדרה:}$$

$$x^4 \neq \frac{1}{2}$$

$$x \neq \pm \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$$

תחומי עלייה ותחומי ירידה:

$$f'(x) = -3(2x - x^{-3})^{-4} (2 + 3x^{-4})$$

$$f'(x) = \frac{-3 \left(2 + \frac{3}{x^4} \right)}{(2x - x^{-3})^4}$$

$$x \neq \pm \sqrt[4]{\frac{1}{2}}, x \neq 0, \text{ הביטויים הללו חיוביים לכל } x \neq 0 \quad \begin{cases} 2 + \frac{3}{x^4} > 0 \\ (2x - x^{-3})^4 > 0 \end{cases}$$

לכן נקבל כי $f'(x) < 0$ היא ביטוי שלילי לכל x בתחום ההגדרה.
תחומי ירידה:

$$x < -\sqrt[4]{\frac{1}{2}} \quad \text{או} \quad -\sqrt[4]{\frac{1}{2}} < x < \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \quad \text{או} \quad x > \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$$

$$m = 5 \quad f(x) = (2x - x^5)^5 \quad \text{ג.}$$

על פי הנתון: $g(x) = f'(x)$

↓

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(x) dx &= f(x) \Big|_0^1 = f(1) - f(0) = \\ &= (2 - 1)^5 - (0) = 1 \end{aligned}$$

פתרון שאלה 7

א. נמצא את נקודות החיתוך בין הפרבולות:

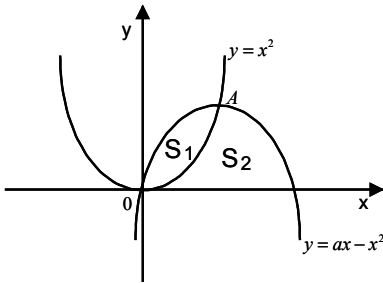
$$x^2 = ax - x^2$$

$$2x^2 - ax = 0$$

$$x(2x - a) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{a}{2}$$

תשובה: $0(0,0) \quad A\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4}\right)$



ב. S_1 הוא השטח הכלוא בין הגרפים בין הנקודה 0 לנקודה $\frac{a}{2}$:

$$S_1 = \int_0^{\frac{a}{2}} (ax - x^2 - x^2) dx = \int_0^{\frac{a}{2}} (ax - 2x^2) dx = \frac{ax^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \Big|_0^{\frac{a}{2}} =$$

$$= \frac{a\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} - \frac{2\left(\frac{a}{2}\right)^3}{3} - (0) = \frac{a^3}{8} - \frac{a^3}{12} = \frac{a^3}{24}$$

כדי לחשב את S_2 , נחשב את סכום השטחים $S_1 + S_2$, שהוא למעשה השטח בין גרף הפונקציה

$$y = ax - x^2 \text{ ובין ציר ה-} x \text{ בין הנקודות } (0,0) \text{ ו- } (a,0):$$

↓

$$ax - x^2 = 0$$

$$x(a - x) = 0$$

$$x = 0 \quad x = a$$

$$S_1 + S_2 = \int_0^a (ax - x^2) dx = \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} = \frac{a^3}{6}$$

נחשב את S_2 על-ידי חיסור S_1 מהשטח הכולל $S_1 + S_2$ ונקבל:

$$S_2 = \frac{a^3}{6} - \frac{a^3}{24} = \frac{a^3}{8}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{a^3}{24}}{\frac{a^3}{8}} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

נחשב את יחס השטחים:

ג. חשבו נפח גוף סיבוב:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{a}{2}} (x^2)^2 dx + \pi \int_{\frac{a}{2}}^a (ax - x^2)^2 dx = \\ &= \pi \int_0^{\frac{a}{2}} (x^4) dx + \pi \int_{\frac{a}{2}}^a (a^2 x^2 - 2ax^3 + x^4) dx = \\ &= \pi \left(\frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^{\frac{a}{2}} + \pi \left(\frac{a^2 x^3}{3} - \frac{2ax^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{\frac{a}{2}}^a = \\ &= \pi \left(\frac{a^5}{32 \cdot 5} \right) + \pi \left[\frac{a^5}{3} - \frac{2a^5}{4} + \frac{a^5}{2} - \left(\frac{a^5}{8 \cdot 3} - \frac{2a^5}{16 \cdot 4} + \frac{a^5}{32 \cdot 5} \right) \right] = \\ &= \pi \cdot \frac{a^5}{160} + \pi \left(\frac{a^5}{3} - \frac{a^5}{24} + \frac{a^5}{32} - \frac{a^5}{160} \right) = \frac{31\pi a^5}{96} = 1.01a^5 \end{aligned}$$

פתרון שאלה 8

נתון: $AB = AC$

נסמן: $\angle ABE = x$

$\angle ECA = x$ - זווית היקפית על אותה קשת

נתון כי: $\angle ABC = 70^\circ$

$\angle EBC = 70^\circ - x$

נתבונן ב- $\triangle ABE$:

על פי משפט הסינוסים: $\frac{AE}{\sin x} = 2R$

$$AE = 2R \sin x$$

נתבונן ב- $\triangle EBC$:

$$\frac{EC}{\sin(70-x)} = 2R$$

$$EC = 2R \sin(70-x)$$

$$\frac{EB}{\sin(70+x)} = 2R$$

$$EB = 2R \sin(70+x)$$

הפונקציה שעבורה יש למצוא מקסימום:

$$f(x) = EA + EB + EC$$

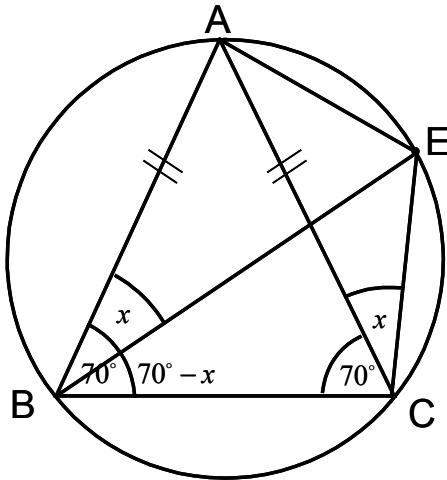
$$f(x) = 2R \sin x + 2R \sin(70-x) + 2R \sin(70+x)$$

$$f'(x) = 2R (\cos x - \cos(70-x) + \cos(70+x))$$

נשתמש בנוסחה:

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$2R (\cos x - 2 \sin 70 \sin x) = 0$$



$$\cos x = 2 \sin 70^\circ \sin x \quad /: \cos x \neq 0$$

$$1 = 2 \sin 70^\circ \cdot \tan x$$

$$\tan x = \frac{1}{2 \sin 70^\circ}$$

$$x = 28.016^\circ$$

x		28.016	
$f'(x)$	+	מקסימום	-
$f(x)$	↗		↘

תשובה: עבור $\angle ABE = 28.016^\circ$ הסכום $EA + EB + EC$ הוא מקסימלי.

תשובות



פתרון שאלה 1

נסמן: x – מספר הדקות הדרושות לצינור א כדי למלא לבדו את הבריכה.
 $0.8x$ – מספר הדקות הדרושות לצינור ב כדי למלא לבדו את הבריכה.
 $x+10$ – מספר הדקות הדרושות לצינור ג כדי למלא לבדו את הבריכה.
 נרכז את הנתונים בטבלה:

	זמן יחד (בדקות)	הספק בדקה	סה"כ הספק
צינור א	10	$\frac{1}{x}$	$\frac{10}{x}$
צינור ב	10	$\frac{1}{0.8x}$	$\frac{10}{0.8x}$
צינור ג	10	$\frac{1}{x+10}$	$\frac{10}{x+10}$

המשוואה:

$$\frac{10}{x} + \frac{10}{0.8x} + \frac{10}{x+10} = 1 \quad / \quad 0.8x(x+10) \quad \text{מכנה משותף}$$

$$8(x+10) + 10(x+10) + 8x = 0.8x(x+10)$$

$$26x + 180 = 0.8x^2 + 8x$$

$$0.8x^2 - 18x - 180 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{18 \pm 30}{1.6} \rightarrow x \text{ מספר חיובי}$$

$$x = 30 \quad \text{ולכן}$$

הדקות הדרושות לכל צינור כדי למלא לבדו את הבריכה:

תשובה:

צינור א: 30 דקות.

צינור ב: 24 דקות.

צינור ג: 40 דקות.

פתרון שאלה 2

א. 1. נתון: $b_1 = a_1 + a_2 + a_3$

$$b_2 = a_2 + a_3 + a_4$$

.

.

.

$$b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = a_n + a_n q + a_n q^2$$

$\Downarrow$

$$b_n = a_n (1 + q + q^2)$$

$$b_{n+1} = a_{n+1} (1 + q + q^2)$$

$$(b_1 \neq 0) \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad \text{נוכיח כי הסדרה החדשה היא סדרה הנדסית:}$$

נתון כי סדרת ה- a_n היא סדרה הנדסית. קיבלנו כי מנת הסדרה החדשה היא q .

2. נתון: $q = 3$, $b_1 = 26$

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 26$$

$$a_1 + 3a_1 + 9a_1 = 26$$

$$13a_1 = 26$$

$$a_1 = 2$$

$$a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 2 \cdot 3^9 = 39,366$$

3. נתון: $\frac{b_{2n}}{a_n} = 351$

$$\frac{26 \cdot 3^{2n-1}}{2 \cdot 3^{n-1}} = 351$$

$$13 \cdot 3^n = 351 / :13$$

$$3^n = 27$$

$$3^n = 3^3$$

$$n = 3$$

נוסחה:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

נוסחה:

$$S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$$

ב. נתונה סדרה חשבונית שבה כל איבר הוא יחידת זמן הנמשכת 5 דקות. כלומר הריצה נמשכה $5n$ דקות.

נתון: האיבר הראשון הוא המרחק שעבר הרץ ב-5 הדקות הראשונות:

$$a_1 = 1000$$

ב-5 הדקות האחרונות

$$a_n = 505$$

נתון שהרץ עבר 9,030 מ'

$$S_n = 9,030 \quad \text{כלומר:}$$

$$\frac{n}{2} [1,000 + 505] = 9,030 \quad \text{נציב בנוסחת הסכום ונקבל:}$$

$$\frac{n}{2} (1,505) = 9,030$$

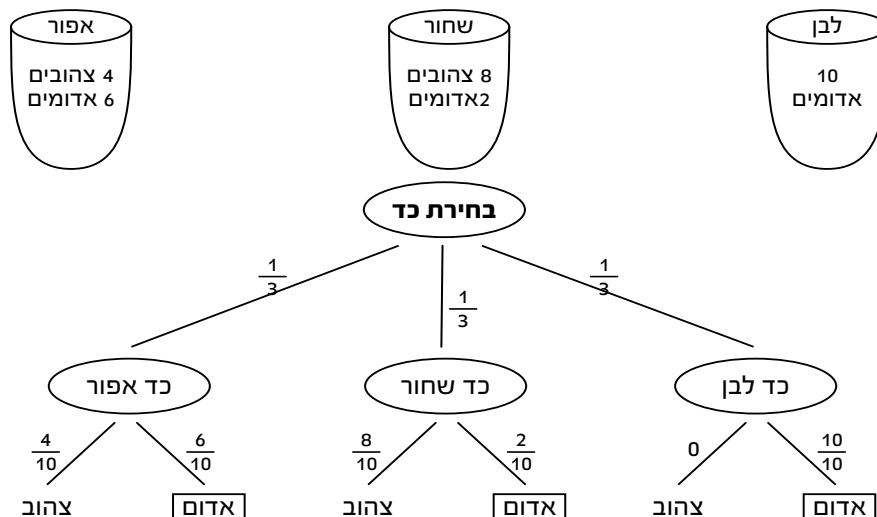
$$n = 12$$

$$5n = 60 \quad \text{יחידת זמן היא } 5n \text{ לכן:}$$

תשובה: הריצה נמשכה במשך $5 \cdot 12$ דקות,

כלומר 60 דקות = 1 שעה.

פתרון שאלה 3

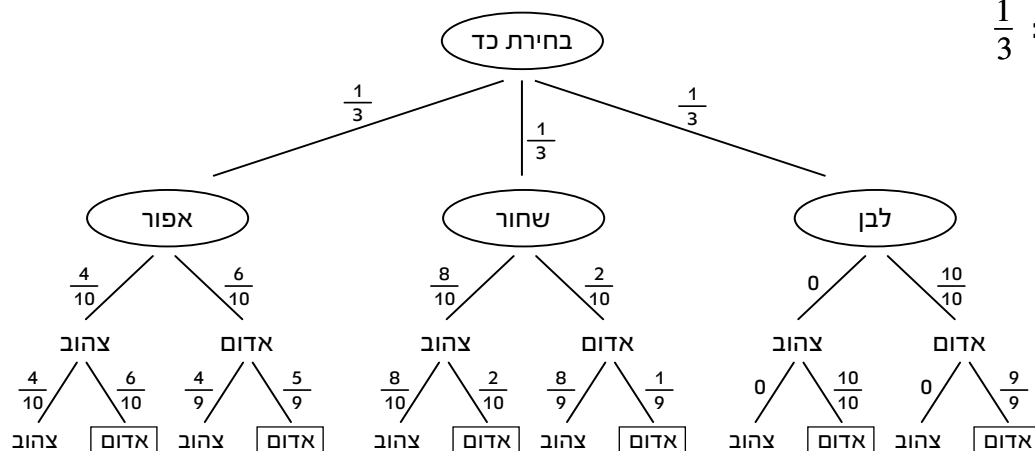


נחשב את ההסתברות להוצאת כדור אדום.

$$P(\text{אדום}) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$P\left(\frac{\text{הוצא כדור לבן}}{\text{נבחר הכד האפור}}\right) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}$$

תשובה: $\frac{1}{3}$

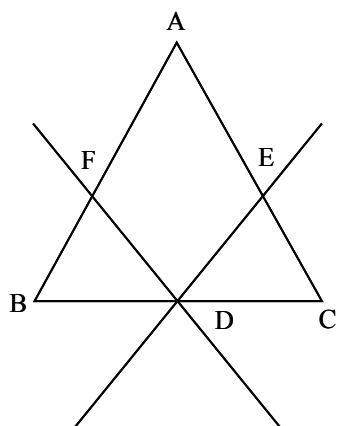


נחבר את כל ענפי העץ המסתעפים בצבע אדום:

$$P(\text{אדום}) = \frac{1}{3} \left[1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} \right]$$

$$P(\text{אדום}) = \frac{79}{135}$$

תשובה: $\frac{79}{135}$



פתרון שאלה 4

$$AB = AC = a \quad \text{נתון + הצבה}$$

$$\angle B = \angle C = \alpha \quad \text{זווית בסיס במשולש שווה-שוקיים + הצבה}$$

↓

$$\angle A = 180 - 2\alpha \quad \text{סכום זווית במשולש ABC}$$

$$\text{נתון} \quad DE \parallel AB$$

$$\text{נתון} \quad DF \parallel AC$$

↓

מקבילית AEDF מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות מקבילות.

↓

$$\angle CED = \angle BFD = 180 - 2\alpha \quad \text{זוויות מתאימות בין ישרים מקבילים}$$

↓

$$\angle EDC = \angle FDB = \alpha \quad \text{חשוב זוויות ב-EDC, FDB בהתאמה.}$$

↓

$$ED = EC = b \quad \text{מול זוויות שוות צלעות שוות + הצבה.}$$

$$AE = AC - EC = a - b \quad \text{חיסור צלעות.}$$

$$AE = FD = a - b \quad \text{צלעות נגדיות במקבילית שוות + העברה.}$$

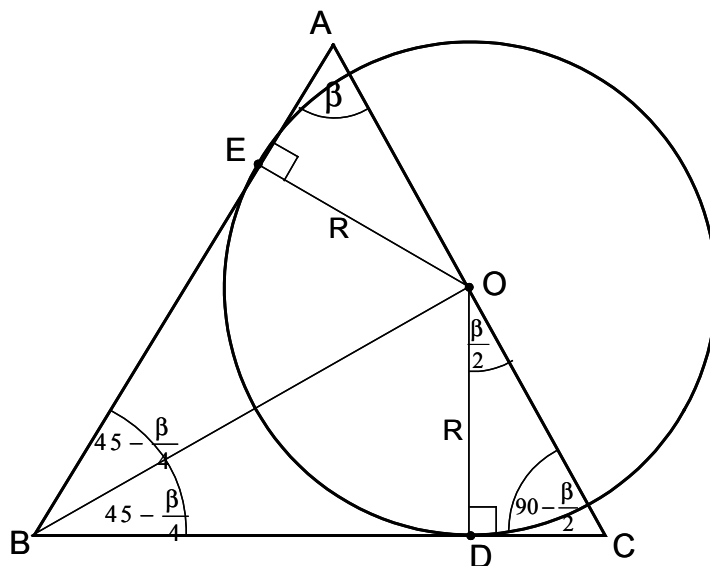
↓

$$FD + DE = a - b + b = a$$

↓

$$\text{מ.ש.ל.} \quad FD + DE = AB = a$$

פתרון שאלה 5



משפט

רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה.

$$OE = R \quad \angle OEA = 90^\circ$$

$$OD = R \quad \angle ODC = 90^\circ$$

$$\angle BAC = \beta \quad \text{נתון:}$$

$$\angle B = \angle C = 90^\circ - \frac{\beta}{2} \quad \text{זוויות הבסיס:}$$

$$\angle DOC = \frac{\beta}{2} \quad \text{ולכן:}$$

משפט

הקטע המחבר נקודה שיוצאים ממנה שני המשיקים למעגל עם מרכז המעגל חוצה את הזווית בין המשיקים.

כלומר: $\angle EBO = \angle OBD$ וכל אחת מהן שווה ל- $45^\circ - \frac{\beta}{4}$.
 כמו כן: $BE = BD$, על-פי המשפט:

משפט

שני משיקים היוצאים מאותה נקודה למעגל שווים עד נקודת ההשקה.

$$DC = R \tan \frac{\beta}{2} \Leftarrow \tan \frac{\beta}{2} = \frac{DC}{R} \quad \text{נתבונן ב- } \triangle ODC :$$

$$BD = R \cot \left(45^\circ - \frac{\beta}{4} \right) \Leftarrow \cot \left(45^\circ - \frac{\beta}{4} \right) = \frac{BD}{R} \quad \text{נתבונן ב- } \triangle BOD :$$

$$BC = DC + BD = R \tan \frac{\beta}{2} + R \cot \left(45^\circ - \frac{\beta}{4} \right) \quad \text{לכן:}$$

$$AE = R \cot \beta \Leftarrow \cot \beta = \frac{AE}{R} \quad \text{נתבונן ב- } \triangle AEO :$$

$$AB = AE + EB \quad \text{ולכן שוק המשולש:}$$

$$AB = R \cot \beta + R \cot \left(45^\circ - \frac{\beta}{4} \right)$$

תשובה אפשרית נוספת:

$$AB = AO + OC = \frac{R}{\cos \frac{\beta}{2}} + \frac{R}{\sin \beta}$$

פתרון שאלה 6

א. $y = -x^2 + 8x - 7$

נשרטט את גרף הפונקציה:

הפונקציה חותכת את ציר ה- x

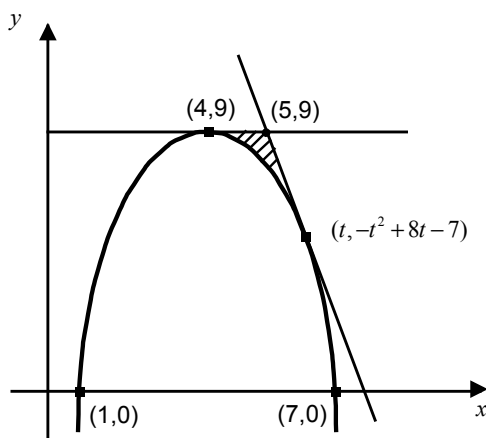
$$x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$(x-1)(x-7) = 0$$

נקודת הקיצון: $y' = -2x + 8 = 0$

$$x = 4; \quad y = -4^2 + 8 \cdot 4 - 7 = 9$$

$$\boxed{\max(4, 9)}$$



נסמן נקודת השקה ב: $(t, -t^2 + 8t - 7)$

נמצא את שיפוע המשיק על-פי הנגזרת בנקודה זו ועל-פי הנוסחה $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ונשווה ביניהם:

שיפוע על-פי הנוסחה

$$y'_{(x=t)} = -2t + 8$$

שיפוע על-פי הנגזרת

$$m = \frac{9 - (-t^2 + 8t - 7)}{5 - t} = \frac{t^2 - 8t + 16}{5 - t}$$

נשווה שיפועים לקבלת t :

$$-2t + 8 = \frac{t^2 - 8t + 16}{5 - t} \Rightarrow (-2t + 8)(5 - t) = t^2 - 8t + 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -10t + 2t^2 + 40 - 8t = t^2 - 8t + 16 \Rightarrow t^2 - 10t + 24 = 0$$

$$(t-6)(t-4) = 0$$

$t = 6$	$t = 4$	
$y = -6^2 + 8 \cdot 6 - 7$	$y = -4^2 + 8 \cdot 4 - 7$	
$y = 5$	$y = 9$	
$(6, 5)$	$(4, 9)$	

נקודות ההשקה:

שיפועי המשיקים:

$$y'_{(t=6)} = -2 \cdot 6 + 8 = -4$$

$$y'_{(t=4)} = -2 \cdot 4 + 8 = 0$$

משוואות המשיקים:

משיק 1 מקביל לציר ה- x ומשוואתו: $y = 9$

משיק 2 $y - 5 = -4(x - 6)$ $y = -4x + 29$

ב. נחלק את חישוב השטח לשניים: S_1 - בין משיק 1 לגרף הפונקציה בין הנקודות 4 ו-5.

S_2 - בין משיק 2 לגרף הפונקציה בין הנקודות 5 ו-6.

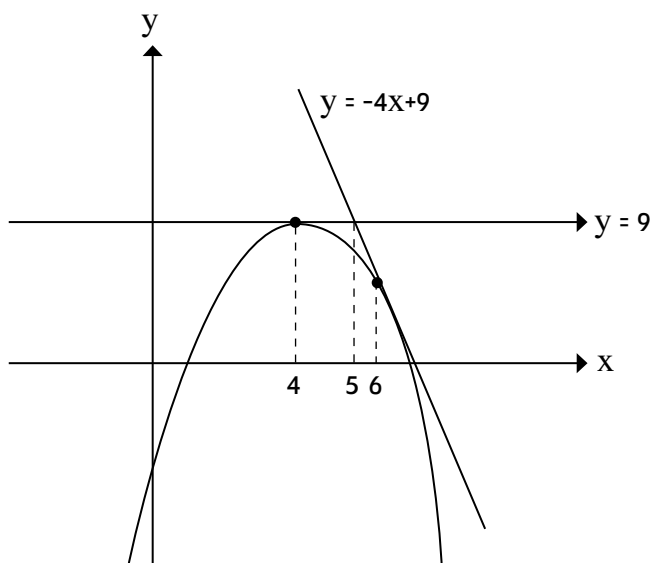
$$S_1 = \int_4^5 [9 - (-x^2 + 8x - 7)] dx = \int_4^5 (x^2 - 8x + 16) dx = \left. \frac{x^3}{3} - \frac{8x^2}{2} + 16x \right|_4^5 =$$

$$= \frac{5^3}{3} - \frac{8 \cdot 5^2}{2} + 16 \cdot 5 - \left(\frac{4^3}{3} - \frac{8 \cdot 4^2}{2} + 16 \cdot 4 \right) = \frac{1}{3}$$

$$S_2 = \int_5^6 [-4x + 29 - (-x^2 + 8x - 7)] dx = \int_5^6 (x^2 - 12x + 36) dx =$$

$$= \left. \frac{x^3}{3} - \frac{12x^2}{2} + 36x \right|_5^6 = \frac{6^3}{3} - \frac{12 \cdot 6^2}{2} + 36 \cdot 6 - \left(\frac{5^3}{3} - \frac{12 \cdot 5^2}{2} + 36 \cdot 5 \right) = \frac{1}{3}$$

$$S_1 + S_2 = \frac{2}{3}$$



פתרון שאלה 7

א. נקודות חיתוך עם ציר x , $y = 0$:

$h(x) = \frac{1-2x}{x^2}$	$g(x) = \frac{2x-1}{x^2}$	$f(x) = \frac{x+2}{x^2}$
$0 = 1 - 2x$	$0 = 2x - 1$	$0 = x + 2$
$x = \frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{2}$	$x = -2$
$A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$	$A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$	$A(-2, 0)$

ב. התנהגות בסביבת הנקודה $x = 0$. סימון: $x \rightarrow 0^+$ שואפת מימין ל- $x = 0$.
 $x \rightarrow 0^-$ שואפת משמאל ל- $x = 0$.

$f(x) = \frac{x+2}{x^2}$	$g(x) = \frac{2x-1}{x^2}$	$h(x) = \frac{1-2x}{x^2}$
$\begin{cases} x \rightarrow 0^+ \\ y \rightarrow +\infty \end{cases}$	$\begin{cases} x \rightarrow 0^+ \\ y \rightarrow -\infty \end{cases}$	$\begin{cases} x \rightarrow 0^+ \\ y \rightarrow +\infty \end{cases}$
$\begin{cases} x \rightarrow 0^- \\ y \rightarrow +\infty \end{cases}$	$\begin{cases} x \rightarrow 0^- \\ y \rightarrow -\infty \end{cases}$	$\begin{cases} x \rightarrow 0^- \\ y \rightarrow +\infty \end{cases}$

תשובה: לפונקציה $f(x)$ מתאים גרף (3)
 לפונקציה $g(x)$ מתאים גרף (1)
 לפונקציה $h(x)$ מתאים גרף (2)

ג. פונקציה (א):

$$y = \frac{x+2}{x^2}$$

$$y' = \frac{x^2 - 2x(x+2)}{(x^2)^2} = \frac{-x^2 - 4x}{x^4}$$

$$-x^2 - 4x = 0$$

$$-x(x+4) = 0$$

$$\searrow \quad \swarrow$$

$x \neq 0$ תחום ההגדרה. $x = -4$

$$y = \frac{-4+2}{16} = -\frac{1}{8}$$

$$B\left(-4, -\frac{1}{8}\right)$$

נקודת מינימום:

$$y'' = \frac{(-2x-4)(x^4) - 4x^3(-x^2-4x)}{x^8}$$

$$y'' = \frac{-2x^5 - 4x^4 + 4x^5 + 16x^4}{x^8} = \frac{2x^5 + 12x^4}{x^8} = \frac{2x^4(x+6)}{x^8} = \frac{2(x+6)}{x^4}$$

$$x+6=0$$

$$x = -6 \quad y = \frac{-6+2}{(-6)^2} = -\frac{1}{9}$$

$$C\left(-6, -\frac{1}{9}\right)$$

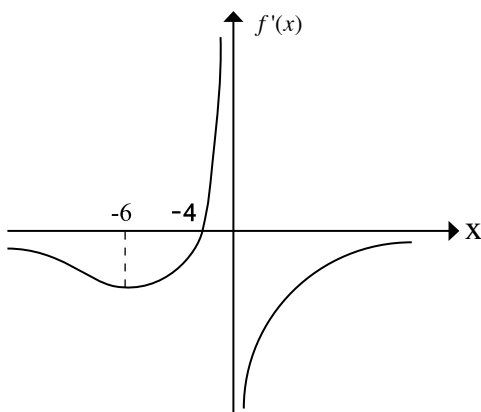
נקודת פיתול:

ד.

x		-6		0	
y''	-		+		+
y	קעורה כלפי מטה $\cap$		קעורה כלפי מעלה $\cup$		קעורה כלפי מעלה $\cup$

קעורה כלפי מעלה: $x > 0$ או $-6 < x < 0$

קעורה כלפי מטה: $x < -6$



ה. על פי תוצאות סעיפים קודמים ניתן לראות

$$f'(-4) = 0 \text{ לכן זוהי נקודת חיתוך עם ציר ה-} x$$

$$f''(-6) = 0 \text{ לכן זוהי נקודת קיצון ונגזרתה משנה סימן}$$

על פי הטבלה בסעיף קודם.

לגרף הנגזרת אסימפטוטות: $x = 0$, $y = 0$

$$y' = \frac{-x^2 - 4x}{x^4} \text{ גרף הנגזרת:}$$

$$\left| \int_{-6}^{-4} f'(x) dx \right| = \left| f(x) \right|_{-6}^{-4} = |f(-4) - f(-6)| = \quad .$$

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2}$$

$$f(-4) = -\frac{1}{8} \quad = \left| -\frac{1}{8} + \frac{1}{9} \right| = \frac{1}{72}$$

$$f(-6) = -\frac{1}{9}$$

$$\text{תשובה: } \frac{1}{72}$$

$$M(x) = f(x) + 3 \quad .$$

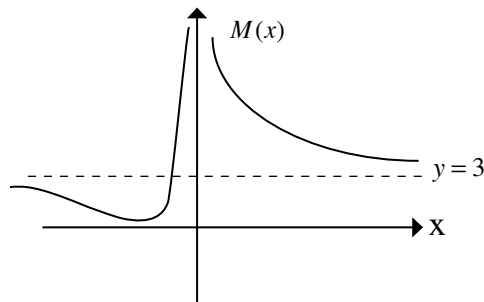
$$M(x) = \frac{x+2}{x^2} + 3$$

אסימפטוטות: $x=0$, $y=3$

הפונקציה $M(x)$ היא הזזה של $f(x)$ על ציר ה- y 3 יחידות למעלה. כלומר שיעור ה- x של נקודת הקיצון ושל נקודת הפיתול נשאר כשהיה אולם שיעור ה- y גדל ב-3 יחידות. כלומר:

$$\min \left(-4, -\frac{1}{8} + 3 \right)$$

$$\text{פיתול} \left(-6, -\frac{1}{9} + 3 \right)$$



פתרון שאלה 8

א. נתונה הפונקציה: $y = ax^3 + 8$

נתון כי: $y'_{(x=-2)} = -12$

נחשב את a :

$$y' = 3ax^2 \Rightarrow 3a(-2)^2 = -12 \quad 12a = -12 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

ב. משוואת המשיק:

$$x = -2 \quad y = -(-2)^3 + 8 = 16$$

$$y - 16 = -12(x + 2) \Rightarrow y = -12x - 8$$

ג. נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x :

$$12x = -8 \\ x = \frac{-8}{12} = \frac{-2}{3}$$

שטח המשולש שהמשיק יוצר עם ציר ה- x :

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 16 = \frac{32}{3}$$

נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x :

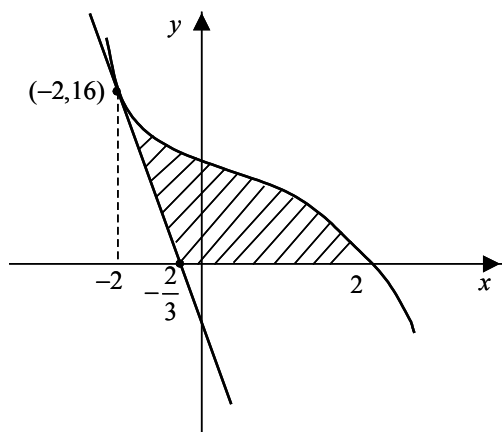
$$-x^3 + 8 = 0$$

$$x^3 = 8$$

$$x = 2$$

נחשב את השטח בין גרף הפונקציה לנקודות -2 , 2 :

$$\int_{-2}^2 (-x^3 + 8) dx =$$



$$\begin{aligned}\frac{-x^4}{4} + 8x \Big|_{-2}^2 &= \frac{-2^4}{4} + 8 \cdot 2 - \left(\frac{-(-2)^4}{4} + 8(-2) \right) = \\ &= -4 + 16 - (-4 - 16) = 32\end{aligned}$$

נחסר משטח זה את שטח המשולש שקיבלנו קודם לקבלת השטח המבוקש.

$$S = 32 - \frac{32}{3} = 21\frac{1}{3}$$

מבוקש

ד. חישוב הנפח:

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_{-2}^2 (-x^3 + 8)^2 dx - \pi \int_{-2}^{\frac{2}{3}} (-12x - 8)^2 dx = \\ &= \pi \int_{-2}^2 (x^6 - 16x^3 + 64) dx - \pi \int_{-2}^{\frac{2}{3}} (144x^2 + 192x + 64) dx = \\ &= \pi \left(\frac{x^7}{7} - 4x^4 + 64x \right) \Big|_{-2}^2 - \pi (48x^3 + 96x^2 + 64x) \Big|_{-2}^{\frac{2}{3}} = \\ &= 292\frac{4}{7}\pi - 113\frac{7}{9}\pi = 178\frac{50}{63}\pi\end{aligned}$$



פתרון שאלה 1

נסמן x – מספר התרגילים שפתר נועם בשעה.

נכניס את הנתונים לתוך טבלה.

זמן עבודה	מספר תרגילים בשעה - קצב	סה"כ תרגילים	
נועם	$\frac{40}{x}$	x	40
שלב א	2	x	$2x$
שלב ב	1	-	-
שלב ג	$\frac{40-2x}{x+1}$	$x+1$	$40-2x$

} נדב

נשווה בין זמן העבודה של נועם לזמן העבודה של נדב:

$$\frac{40}{x} = 2 + 1 + \frac{40-2x}{x+1}$$

$$\frac{40}{x} = 3 + \frac{40-2x}{x+1} \quad \bigg/ \cdot x(x+1)$$

$$40(x+1) = 3x(x+1) + x(40-2x)$$

$$40x + 40 = 3x^2 + 3x + 40x - 2x^2$$

$$x^2 + 3x - 40 = 0$$

$$(x-5)(x+8) = 0$$

$$x = 5$$

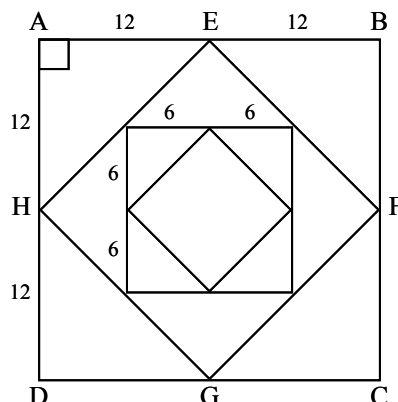
$$x = -8$$

לא ייתכן

תשובה: נועם פתר 5 תרגילים בשעה.

פתרון שאלה 2

א. 1. נסרטט מספר ריבועים על-פי ההנחיה בשאלה:



צלעות הריבועים במקום אי-זוגי, כלומר ריבוע ראשון, שלישי, חמישי וכך הלאה, מהוות סדרה הנדסית אינסופית יורדת כאשר כל צלע ריבוע מהווה $\frac{1}{2}$ מצלע הריבוע הקודם, כלומר מתקבלת סדרת הצלעות במקום אי-זוגי: 24, 12, 6, 3, 1.5,.....

צלעות הריבועים במקום זוגי, כלומר ריבוע שני, רביעי, שישי וכך הלאה, מהוות סדרה הנדסית אינסופית יורדת, אף היא בעלת מנה $\frac{1}{2}$ כאשר איברה הראשון הוא על-פי משפט פיתגורס

$$HE^2 = 12^2 + 12^2$$

$$HE = 12\sqrt{2}$$

לכן סדרת הצלעות במקום זוגי:

$$12\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 1.5\sqrt{2}, \dots$$

סדרת כל צלעות הריבועים אף היא סדרה הנדסית אינסופית יורדת

$$24, 12\sqrt{2}, 12, 6\sqrt{2}, 6, 3\sqrt{2}, 3, 1.5\sqrt{2}, 1.5, \dots$$

$$\text{שמנתה: } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

סדרת היקפי הריבועים אף היא סדרה הנדסית יורדת:

$$4 \cdot 24, 4 \cdot 12\sqrt{2}, 4 \cdot 12, 4 \cdot 6\sqrt{2}, \dots$$

נחשב על-פי נוסחת הסכום

נוסחה:

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

את סכום היקפי הריבועים:

נוסחה:

$$S = \frac{a_1^2}{1 - q^2}$$

נכפול בצמוד

$$S = {}_{\text{ס"מ}} 96 \left(2 + \sqrt{2} \right) = {}_{\text{ס"מ}} 327.76$$

2. סכום סדרת שטחי הריבועים הוא סכום ריבועי האיברים, כלומר:

$$S = \frac{24^2}{1 - \frac{1}{2}} = {}_{\text{סמ"ר}} 1152$$

ב. נתון כלל הנסיגה:

$$\begin{cases} a_1 = -4 \\ a_{n+1} = 3n + 1 - a_n \end{cases}$$

1. נחשב את האיברים הראשונים בסדרה:

$$\begin{aligned} (n=1) \quad a_2 &= 3 \cdot 1 + 1 - (-4) \\ a_2 &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (n=2) \quad a_3 &= 3 \cdot 2 + 1 - 8 \\ a_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (n=3) \quad a_4 &= 3 \cdot 3 + 1 - (-1) \\ a_4 &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (n=4) \quad a_5 &= 3 \cdot 4 + 1 - 11 \\ a_5 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (n=5) \quad a_6 &= 3 \cdot 5 + 1 - 2 \\ a_6 &= 14 \end{aligned}$$

הסדרה: $-4, 8, -1, 11, 2, 14, \dots$

2. נבטא את a_{n+2} באמצעות כלל הנסיגה:

$$a_{n+2} = 3(n+1) + 1 - a_{n+1}$$

נחליף את הביטוי a_{n+1} על פי כלל הנסיגה:

$$a_{n+2} = 3n + 3 + 1 - (3n + 1 - a_n)$$

$$a_{n+2} = 3n + 4 - 3n - 1 + a_n$$

$$a_{n+2} = 3 + a_n$$

כלומר: $a_{n+2} - a_n = 3$ מ.ש.ל.

3. על פי סעיף ב' הוכחנו כי סדרת האיברים העומדים במקום זוגי או אי זוגי

הן סדרות חשבוניות בעלות הפרש 3.

יש לחשב את הסכום

$$S_{20} = 8 + 11 + 14 + \dots$$

$$S_{20}^{\text{מקום זוגי}} = \frac{20}{2} [2 \cdot 8 + (20 - 1)3]$$

$$S_{20} = 730$$

תשובה: 730

נוסחה:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

פתרון שאלה 3

נסמן מאורעות:

A - הצלחה במתכונת.

B - הצלחה בבגרות.

נתון: $N(S) = 500$

$$N(\bar{A} \cap B) = N(A \cap \bar{B}) \quad , \quad P(\bar{A}) = 0.2$$

$$P(B/A) = 0.9$$

$\Downarrow$

$$\frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 0.9$$

$$\frac{P(B \cap A)}{0.8} = 0.9$$

$$P(B \cap A) = 0.72$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(A \cap \bar{B}) \quad \text{ידוע כי}$$

$\Downarrow$

$$N(\bar{A} \cap B) = 0.08 \cdot 500 = 40 \quad \text{א.}$$

$$P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0.08}{0.2} = 0.4 \quad \text{ב.}$$

$$S = \frac{4 \cdot 24}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{192}{2 - \sqrt{2}} \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{192(2 + \sqrt{2})}{2} \Rightarrow$$

סה"כ	$\bar{A}$	A	
0.8	0.08	0.72	B
0.2	0.72	0.08	$\bar{B}$
1	0.2	0.8	סה"כ

פתרון שאלה 4

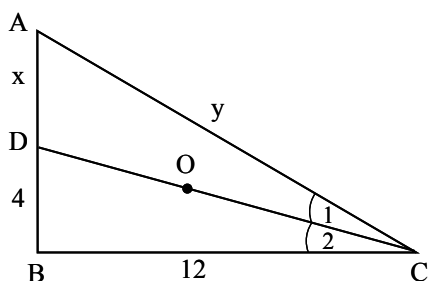
מרכז המעגל החסום במשולש הוא נקודת מפגש חוצי זוויות המשולש

↓

$$\angle C_1 = \angle C_2$$

משפט חוצה-זווית $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{DB}$.1

נתון $\angle B = 90^\circ$



משפט פיתגורס ב- $\triangle ABC$ $AB^2 + BC^2 = AC^2$.2

נתון $BC = 12$ ס"מ, $BD = 4$ ס"מ

הצבה $AD = x$

$AC = y$

נציב ב-(1) וב-(2) בהתאמה

$$y = 3x \Leftrightarrow \frac{y}{12} = \frac{x}{4}$$

$$x^2 + 8x + 16 + 144 = (3x)^2 \Leftrightarrow (x+4)^2 + 12^2 = y^2$$

↓

$$8x^2 - 8x - 160 = 0 \quad / : 8$$

$$x^2 - x - 20 = 0$$

$$(x-5)(x+4) = 0$$

↙ ↘

$$x = 5 \quad x = -4$$

לא ייתכן

$$y = 3 \cdot 5 = 15$$

תשובה: $AC = 15$, $AD = 5$

ב. AO חוצה-זווית על-פי המשפט שצוין לעיל

↓

$$\text{משפט חוצה-זווית} \quad \frac{AD}{AC} = \frac{DO}{OC}$$

$$\frac{5}{15} = \frac{DO}{OC}$$

$$\text{מ.ש.ל. ב.} \quad \frac{DO}{OC} = \frac{1}{3}$$

ג. ב- $\triangle BDC$ משפט פיתגורס

$$DC^2 = 4^2 + 12^2$$

$$DC = \sqrt{160} = 12.65$$

$$\text{נסמן:} \quad DO = t$$

↓

$$OC = 3t \quad \text{על-פי סעיף ב'.}$$

↓

$$t + 3t = \sqrt{160}$$

$$4t = \sqrt{160}$$

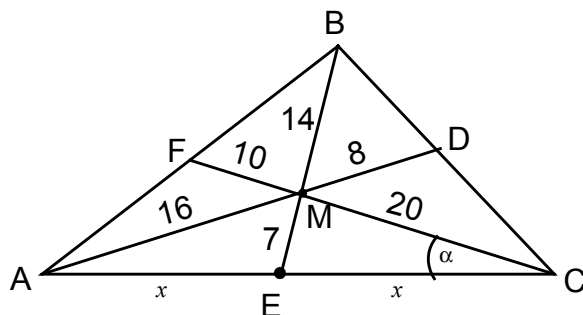
$$4t = 4\sqrt{10}$$

$$t = \sqrt{10} = 3.16$$

$$\text{תשובה:} \quad DO = \sqrt{10}_{\text{ס"מ}}, \quad OC = 3\sqrt{10}_{\text{ס"מ}}$$

פתרון שאלה 5

א.



משפט

תיכונים במשולש מחלקים זה את זה ביחס 2:1, החלק הגדול הוא החלק הקרוב לקודקוד.

לפי המשפט:

$$\begin{aligned} BM &= 14 & ME &= 7 \\ CM &= 20 & MF &= 10 \\ AM &= 16 & MD &= 8 \end{aligned}$$

נתבונן ב- $\triangle MEC$ וב- $\triangle MAC$.

נשתמש במשפט הקוסינוסים בשני המשולשים עבור $\angle MCA = \alpha$ - זווית משותפת.

נוסחה:

משפט הקוסינוסים:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

נבודד $\cos \gamma$ ונקבל:

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\Delta MEC$$

$$\cos \alpha = \frac{20^2 + (2x)^2 - 16^2}{2 \cdot 20 \cdot 2x}$$

$$\Delta MAC$$

$$\cos \alpha = \frac{20^2 + x^2 - 7^2}{2 \cdot 20 \cdot x}$$

נשווה בין הביטויים ונקבל:

$$\frac{400 + 4x^2 - 256}{80x} = \frac{400 + x^2 - 49}{40x} \quad / \cdot 80x$$

$$144 + 4x^2 = 2(351 + x^2)$$

$$2x^2 = 558$$

$$x^2 = 279$$

$$x = 16.7$$

$$AC = 2x$$

תשובה: $AC = 33.4$
ס"מ

ב.

$$\cos \alpha = \frac{400 + 279 - 49}{2 \cdot 20 \cdot 16.7}$$

$$\alpha = 19.418^\circ$$

$$\Delta EMC$$

$$\frac{16.7}{\sin \angle EMC} = \frac{7}{\sin 19.418}$$

$$\angle EMC = 52.48^\circ$$

$$\cos \angle AMC = \frac{16^2 + 20^2 - (2x)^2}{2 \cdot 16 \cdot 20}$$

$$\cos \angle AMC = \frac{16^2 + 20^2 - 4 \cdot 279}{640} = \frac{-460}{640}$$

$$\angle AMC = 135.95^\circ$$

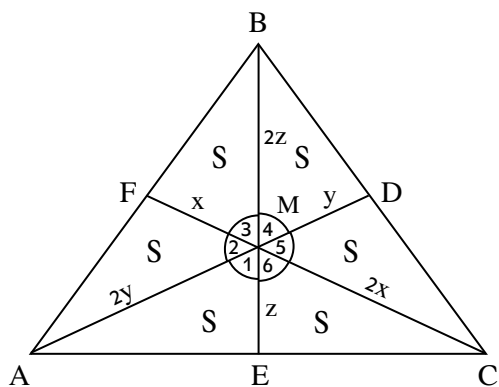
$$\angle BMD = 135.95^\circ - 52.48^\circ = 83.47^\circ$$

$$S_{AFMD} = S_{\Delta FMB} + S_{\Delta BMD} = \frac{10 \cdot 14 \cdot \sin 52.48}{2} + \frac{8 \cdot 14 \cdot \sin 83.47}{2}$$

$$= 111.156$$

סמ"ר

תשובה: 111.156 סמ"ר



ג. על פי זוויות קודקודיות

$$\sphericalangle M_1 = \sphericalangle M_4 = \alpha$$

$$\sphericalangle M_2 = \sphericalangle M_5 = \beta$$

$$\sphericalangle M_3 = \sphericalangle M_6 = \gamma$$

על פי מפגש תיכונים:

$$CM = 2MF = 2x$$

$$AM = 2MD = 2y$$

$$BM = 2ME = 2z$$

$$S_{\triangle BMF} = S_{\triangle CME} = \frac{2 \cdot z \cdot x \sin \gamma}{2}$$

$$S_{\triangle BMD} = S_{\triangle AME} = \frac{2 \cdot z \cdot y \sin \alpha}{2}$$

$$S_{\triangle DMC} = S_{\triangle FMA} = \frac{2 \cdot x \cdot y \sin \beta}{2}$$

תיכון מחלק משולש לשני משולשים שווי שטח (לשני המשולשים צלע וגובה לצלע זהים)

$$S_{\triangle BMF} = S_{\triangle FMA} = S_{\triangle CME}$$

מכאן נקבל

כלומר נקודת מפגש התיכונים מחלקת את המשולש ל-6 משולשים שווי שטח.

נסמן כל שטח משולש ב-S

$$\frac{S_{BFMD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{2S}{6S} = \frac{1}{3} \quad \text{לכן}$$

$$S_{\triangle ABC} = 3 \cdot 111.156 = 333.469 \quad \text{ד. סמ"ר}$$

פתרון שאלה 6

א. נתון: $f'(x) = 10x(x^2 - 16)^4$

כדי למצוא את $f(x)$ נבצע אינטגרל ל- $f'(x)$, באמצעות זיהוי נגזרת פנימית ונגזרת חיצונית. כלומר

"ננחש" $\int 10x(x^2 - 16)^4 dx = (x^2 - 16)^5 + c$

ונבדוק ע"י גזירה שאכן מתקבל הביטוי בתוך האינטגרנט או באמצעות שיטת ההצבה.

נסמן: $u = x^2 - 16$

על-ידי גזירה של שני האגפים נקבל: $du = 2x dx$

ולכן: $* dx = \frac{du}{2x}$

נציב * : $\int 10x(x^2 - 16)^4 dx = \int 10x(u)^4 dx = \int 10x(u)^4 \cdot \frac{du}{2x}$

$$= \int 5(u)^4 du = 5 \frac{u^5}{5} + C = (x^2 - 16)^5 + C$$

$$f(x) = (x^2 - 16)^5 + C$$

נציב (3, 4):

$$3 = (4^2 - 16)^5 + C$$

$$\boxed{3 = C}$$

תשובה: $f(x) = (x^2 - 16)^5 + 3$

ב. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 10x(x^2 - 16)^4 = 0$



$$x^2 - 16 = 0$$

$$10x = 0$$

$$x = \pm 4$$

$$x = 0$$



$$y = 3$$

$$y = (-16)^5 + 3$$

נאפיין את סוג הנקודות באמצעות טבלה:

x	$x < -4$	-4	$-4 < x < 0$	0	$0 < x < 4$	4	$x > 4$
y'	-	פיתול	-	מינימום	+	פיתול	+
y	↘		↘		↗		↗

מסקנות: $(-4,3)$ $(4,3)$ נקודות פיתול.

$x = 0$ נקודת מינימום.

ג. $f(x) = (x^2 - 16)^5 + 3$

כאשר $f(x) = 0$

$$(x^2 - 16)^5 + 3 = 0$$

$$(x^2 - 16)^5 = -3/\sqrt[5]{}$$

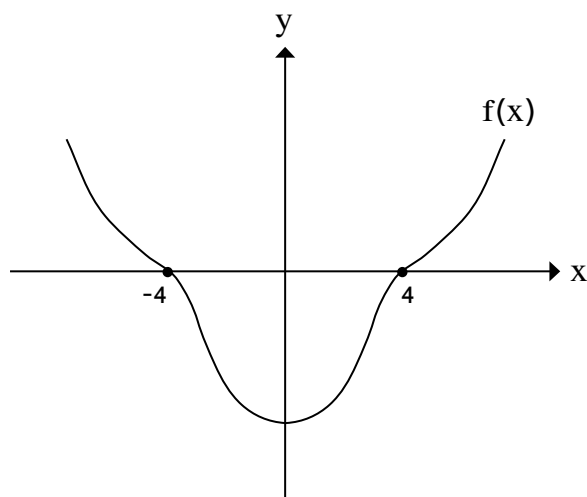
$$x^2 = 16 - 1.245$$

$$(3.84, 0) \quad (-3.84, 0)$$

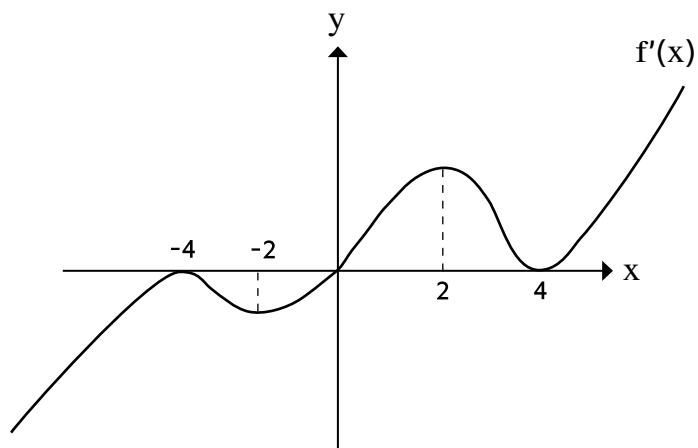
$$x^2 = 14.754$$

$$x = \pm 3.84$$

ד. גרף הפונקציה



ה. על סמך הטבלה והתוצאות מסעיפים קודמים



הסבר: גרף הנגזרת $f'(x) = 10x(x^2 - 16)^4$

מתאפס בנקודות $x = \pm 4, x = 0$

ועל פי תחומי חיוביות/שליליות המוצגים בטבלה בסעיף ב.

$$\int_0^4 f'(x)dx + \int_{-4}^0 -f'(x)dx \quad .1$$

$$= f(x) \Big|_0^4 - f(x) \Big|_{-4}^0 =$$

$$= f(4) - f(0) - f(0) + f(-4) = 6 - 2f(0)$$

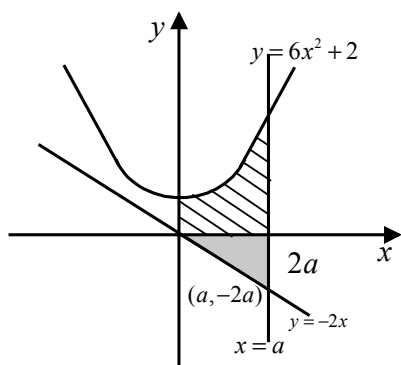
הערה: $f(4) = f(-4) = 3$ חושב בסעיף ב.

פתרון שאלה 7

א. נסמן: S_1 - שטח מקווקו (עליון).

S_2 - שטח מנוקד (תחתון).

$$S_2 = S_{\Delta} = \frac{a \cdot 2a}{2} = a^2$$



$$S_1 = \int_0^a (6x^2 + 2) dx = \frac{6x^3}{3} + 2x \Big|_0^a = 2a^3 + 2a$$

נבנה את הפונקציה כפונקציה של a , המתארת את יחס השטחים, ועבורה נמצא מינימום, כלומר:

$$f(a) = \frac{2a^3 + 2a}{a^2} = 2a + \frac{2}{a}$$

$$f'(a) = 2 - \frac{2}{a^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a^2 = 2 \Rightarrow a^2 = 1$$

$$\Rightarrow a = \pm 1$$

$$\boxed{a=1} \quad \text{ולכן} \quad a > 0$$

x	0		1	
$f'(a)$		-	מינימום	+
$f(a)$		$\searrow$		$\nearrow$

עבור $a = 1$ יחס השטחים הוא מינימלי.

ב. $h(x) = \frac{6x^2 + 2}{-2x}$

1. תחום הגדרה: $x \neq 0$

2. נקודות קיצון: $h'(x) = \frac{12x \cdot (-2x) + 2(6x^2 + 2)}{(-2x)^2}$

$$h'(x) = \frac{-24x^2 + 12x^2 + 4}{4x^2} =$$

$$h'(x) = \frac{-12x^2 + 4}{4x^2} = 0$$

$$-12x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{3}$$

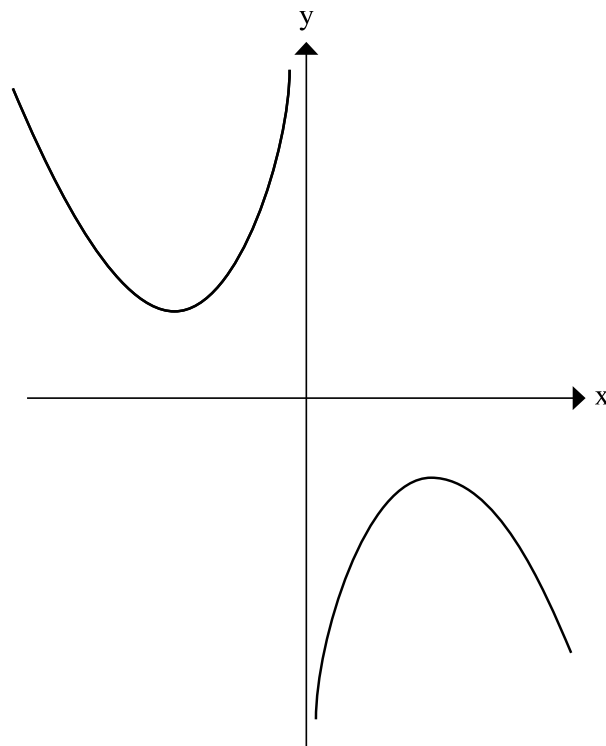
$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$h''(x) = -24x$$

$$h''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0 \quad \text{max} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -3.46\right)_{\text{max}}$$

$$h''\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) > 0 \quad \text{min} \quad \Rightarrow \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 3.46\right)_{\text{min}}$$

גרף הפונקציה:



$$h'(x) = -3 + \frac{1}{x^2} \quad 3.$$

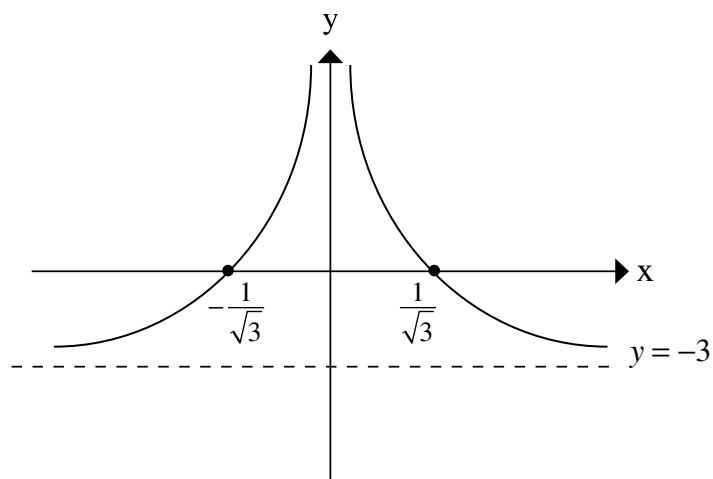
אסימפטוטות: $x = 0$ $y = -3$

כאשר $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $h(x)$ יורדת לכן $h'(x)$ שלילית

כאשר $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < 0$, $0 < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$ $h(x)$ עולה לכן $h'(x)$ חיובית

כאשר $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$ $h(x)$ יורדת לכן $h'(x)$ שלילית

גרף אפשרי של הנגזרת:



פתרון שאלה 8

א. נקודת המינימום $f'(x) = 0$, כלומר: $2x - 2 = 0$

$$\min(1, 4) \Leftarrow \boxed{x=1}$$

נתון: $f'(x) = \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+5}}$

נשתמש בשיטת ההצבה: או באמצעות "ניחוש" על פי זיהוי הנגזרת הפנימית והחיצונית

נסמן: $u = x^2 - 2x + 5$ ובדיקה שאכן מתקבל הביטוי בתוך האינטגרנט

נקבל: $\frac{du}{dx} = 2x - 2$

$$\int \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+5}} dx = 2\sqrt{x^2-2x+5} + C$$

מכאן: $du = (2x-2)dx$

נבצע אינטגרל ל- $f'(x)$ לקבלת $f(x)$ ונציב את התוצאות שקיבלנו.

$$f(x) = \int \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+5}} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int (u)^{-\frac{1}{2}} du = \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$f(x) = 2\sqrt{u} + c$$

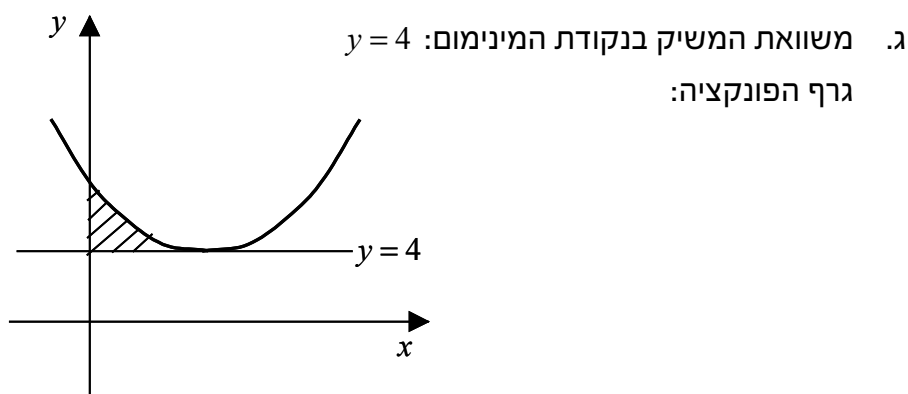
נציב את הביטוי עבור u ונקבל: $f(x) = 2\sqrt{x^2-2x+5} + c$

לקבלת C נציב $(1, 4)$: $4 = 2\sqrt{1^2-2\cdot 1+5} + c$

$$4 = 4 + c \Rightarrow \boxed{c=0}$$

תשובה: $f(x) = 2\sqrt{x^2-2x+5}$

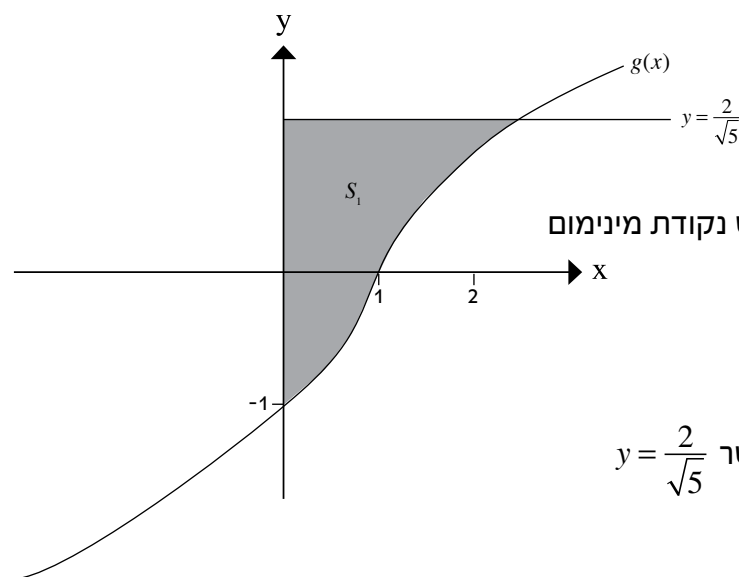
- ב. תחום הגדרה: $x^2 - 2x + 5 > 0$, $\Delta < 0$, ביטוי חיובי לכל x .
 הפונקציה מוגדרת לכל x .
 גרף הפונקציה מופיע בסעיף הבא לצורך חישוב שטח.



נחשב את נפח גוף הסיבוב.

$$V = \pi \int_0^1 [f(x)]^2 dx - \pi \int_0^1 (4)^2 dx = \pi \int_0^1 4(x^2 - 2x + 5) dx - \pi \int_0^1 16 dx =$$

$$= 4\pi \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x \right) \Big|_0^1 - 16\pi x \Big|_0^1 = 4\pi \left(\frac{1}{3} - 1 + 5 \right) - 16\pi = \frac{4\pi}{3}$$



ד. $g(x) = f'(x)$

א. $f'(x) = 0$

מסעיף קודם כאשר $x = 1$ ל- $f(x)$ יש נקודת מינימום

כאשר $x < 1$, $f'(x)$ שלילית

כאשר $x > 1$, $f'(x)$ חיובית

ב. נמצא את נקודת החיתוך בין $g(x)$ לישר $y = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} / ()^2 : 2$$

$$5(x-1)^2 = x^2 - 2x + 5$$

$$5x^2 - 10x + 5 = x^2 - 2x + 5$$

$$4x^2 - 8x = 0$$

$$4x(x-2) = 0$$

$$\begin{array}{ccc} \swarrow & & \searrow \\ x=0 & x=2 & f(x) = 2\sqrt{x^2-2x+5} \end{array}$$

בבדיקה אינו פתרון
של המשוואה

$$S_1 = \int_0^2 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - f'(x) \right) dx = \frac{2}{\sqrt{5}} x - f(x) \Big|_0^2 = \frac{4}{\sqrt{5}} - f(2) + f(0) = \frac{4}{\sqrt{5}}$$



פתרון שאלה 1

נפגשו באמצע הדרך, כל רוכב נסע 200 ק"מ	מהירות	זמן	דרך	רוכב אופניים	לפני הפגישה
	x	$\frac{200}{x}$	200		
	y	$\frac{200}{y}$	200	רוכב קטנוע	אחרי הפגישה
	x	4	$4x$	רוכב אופניים	
	y	4	$4y$	רוכב קטנוע	

משוואה I:

$$\frac{200}{x} = \frac{200}{y} + 2 \quad \text{כלומר: רוכב הקטנוע יצא שתיים אחרי רוכב האופניים, כלומר:}$$

$$4x + 4y = 180$$

משוואה II:

I

$$\frac{200}{x} = \frac{200}{y} + 2 \quad / \cdot xy$$

$$200y = 200x + 2xy$$

II

$$4x + 4y = 180 \quad / : 4$$

$$x + y = 45$$

$$y = 45 - x \quad \text{נציב ביטוי זה במשוואה I:}$$

$$200(45 - x) = 200x + 90x - 2x^2$$

$$2x^2 - 490x + 9000 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{490 \pm 410}{4} = \begin{matrix} \nearrow 225 \\ \searrow 20 \end{matrix} \quad \text{לא ייתכן}$$

$$\Rightarrow y = 45 - 20 = 25$$

תשובה:

מהירות רוכב האופניים 20 קמ"ש.

מהירות רוכב הקטנוע 25 קמ"ש.

פתרון שאלה 2

א. נתונה הסדרה ההנדסית: $1, 5, 25, \dots$

שבה: $a_1 = 1, q = 5$

נתון כי סכום 3 איברים החל במקום ה- k הוא 19375

כלומר $S_3 = 19,375$ החל ב- a_k

$$\frac{a_k(q^3 - 1)}{q - 1} = 19,375$$

$$\frac{a_k(5^3 - 1)}{5 - 1} = 19,375 / 4$$

$$a_k \cdot 124 = 77,500 / :124$$

$$a_k = 625$$

$$a_1 \cdot q^{k-1} = 625$$

$$1 \cdot 5^{k-1} = 5^4$$

$$k - 1 = 4$$

$$k = 5$$

$$a_5 = 625 \quad \text{תשובה:}$$

ב. 1. בסדרה $2n$ איברים.

נתון: $3 \cdot S_n = S_{2n} - S_n$

$\Downarrow$

$$4 \cdot S_n = S_{2n}$$

נציב בנוסחת הסכום לסדרה חשבונית

$$4 \cdot \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] = \frac{2n}{2} [2a_1 + (2n-1)d]$$

$$2n(2a_1 + nd - d) = n(2a_1 + 2nd - d)$$

נחלק את שני אגפי המשוואה ב: $n \neq 0$ (n מספר טבעי)

$$2(2a_1 + nd - d) = 2a_1 + 2nd - d$$

$$4a_1 + 2nd - 2d = 2a_1 + 2nd - d$$

$$2a_1 = d$$

נוסחאות:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

נוסחה:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

$$2. \quad \text{נתון: } a_{2n} + 4 = a_n + a_{n+1}$$

נציב בנוסחת האיבר הכללי לסדרה חשבונית

$$a_1' + (2n-1)d + 4 = a_1' + (n-1)d + a_1 + nd$$

$$2nd - d + 4 = nd - d + a_1 + nd$$

$$2nd + 4 = nd + a_1$$

$$2a_1 = d \quad \text{ומתוצאות סעיף א } \boxed{a_1 = 4}$$

$$\boxed{d = 8} \quad \text{נקבל}$$

$$3. \quad \text{מקום זוגי} \quad S_n = \frac{n}{2} [2a_2 + (n-1)2d]$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2 \cdot 12 + (n-1)16]$$

$$S_n = n(12 + 8n - 8)$$

$$S_n = n(8n + 4)$$

$$\boxed{S_n = 8n^2 + 4n}$$

נוסחה:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

פתרון שאלה 3

נסמן:

A - הצלחה בבדיקה ראשונה.

B - הצלחה בבדיקה שניה.

נתון: $P(B) = 0.9$, $P(A) = 0.8$

$$P(\text{הצלחה רק באחת}) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = 0.3$$

נסמן: $P(\bar{A} \cap B) = x$

$\Downarrow$

$$P(A \cap \bar{B}) = 0.3 - x$$

על פי הטבלה:

סה"כ	$\bar{A}$	A	
0.9	0.2	0.7	B
0.1	0	0.1	$\bar{B}$
	0.2	0.8	סה"כ

$$P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = 0.8$$

$$P(A \cap B) = 0.8 - (0.3 - x)$$

$$P(A \cap B) = 0.5 + x$$

$$P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0.9 \quad \text{ידוע כי:}$$

$$0.5 + x + x = 0.9 \quad \text{נציב:}$$

$$2x = 0.4$$

$$x = 0.2$$

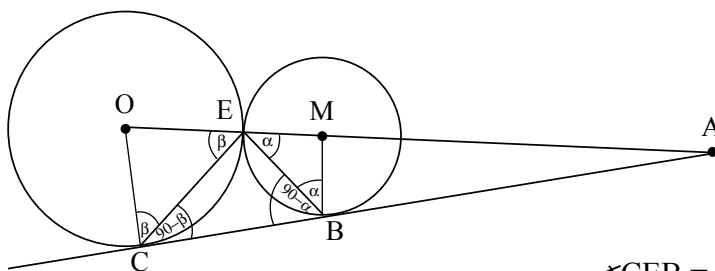
$$P(A \cap B) = 0.7 \quad \text{א.}$$

$$P\left(\begin{array}{c} \text{יעבור לפחות} \\ \text{בדיקה אחת} \end{array}\right) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0 = 1 \quad \text{ב.}$$

משמעות הפתרון היא כי יש סיכוי של 100% שהמכשיר יעבור את אחת הבדיקות או את שתיהן.

$$P(\bar{B} / A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{0.1}{0.8} = \frac{1}{8} \quad \text{ג.}$$

פתרון שאלה 4

 $\angle CEB = 90^\circ$:5"y .N

בניית עזר: MB, OC רדיוסים.

$\angle MBC = \angle OCB = 90^\circ$ רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה

$$\Delta_{\text{MEB}} \text{ זווית בסיס במשולש שו"ש} \quad \angle_{\text{MEB}} = \angle_{\text{MBE}} = \alpha$$
$$\Delta OCE \text{ זווית בסיס במשולש שוו"ש} \quad \angle OEC = \angle OCE = \beta$$

חיסור זווית $\angle EBC = 90^\circ - \alpha$

חיסור זווית $\angle ECB = 90^\circ - \beta$

↓

$$\angle \text{CEB} = \alpha + \beta$$

זווית שטוחה $\angle \text{OEM} = 180^\circ$

↓

סכום זוויות על ישר $\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180^\circ$

$$2\alpha + 2\beta = 180 \quad /:2$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

↓

ל.ש.מ. $\angle CEB = 90^\circ$

ΔAEC , ΔAEB -ג .ב

$$\angle A = \angle A$$

מסעיף קודם $\angle ECB = 90 - \beta$

על פי סעיף א': $\alpha = 90 - \beta$



$$\sphericalangle AEB = \sphericalangle ACE = \alpha$$

$$(7.7) \quad \Delta AEB \sim \Delta ACE$$

↓

$$\text{יחס הדמיון} \quad \boxed{\frac{AE}{AC}} = \frac{EB}{CE} = \boxed{\frac{AB}{AE}}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{מ.ש.ל.} \quad AE^2 = AC \cdot AB$$

$$\text{ג. נתון: } AB = 16 \text{ ס"מ}, BC = 9 \text{ ס"מ}, AC = 25 \text{ ס"מ} \Leftarrow$$

נציב בתוצאת סעיף ב'.

$$AE^2 = 25 \cdot 16$$

$$AE^2 = 400 / \sqrt{\quad}$$

$$AE = 20 \text{ ס"מ}$$

ב- ΔACO

$$\text{משפט פיתגורס} \quad CO^2 + AC^2 = AO^2$$

$$\text{נסמן:} \quad CO = OE = R$$

$\Downarrow$

$$AO = AE + OE = 20 + R$$

$$\text{נציב:} \quad R^2 + 25^2 = (20 + R)^2$$

$$R^2 + 625 = 400 + 40R + R^2$$

$$225 = 40R / : 40$$

$$\boxed{5\frac{5}{8} = R}$$

ב- ΔABM

$$\text{משפט פיתגורס} \quad MB^2 + AB^2 = AM^2$$

$$\text{נסמן:} \quad ME = MB = r$$

$$AE = AM + ME$$

$$20 = AM + r$$

$$AM = 20 - r$$

$$\text{נציב:} \quad r^2 + 16^2 = (20 - r)^2$$

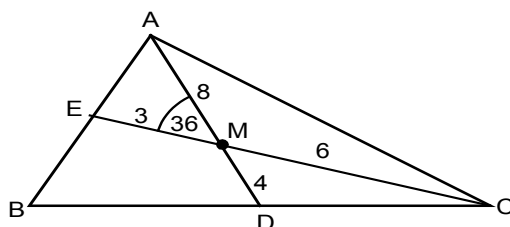
$$r^2 + 256 = 400 - 40r + r^2$$

$$40r = 144$$

$$\boxed{r = 3.6}$$

$$\text{תשובה:} \quad 5\frac{5}{8} \text{ ס"מ}, 3.6 \text{ ס"מ}$$

פתרון שאלה 5



משפט

נקודת מפגש התיכונים מחלקת את התיכונים ביחס 1 : 2, החלק הגדול הוא החלק הקרוב לקודקוד.

לכן נתון: $AM = 8, MD = 4$ כלומר, $AD = 12$

נתון כי: $MC = 6, ME = 3$ כלומר, $CE = 9$

$$\angle AME = 36^\circ$$

א. נתבונן ב- $\triangle AME$.

לפי משפט הקוסינוסים:

$$AE^2 = 8^2 + 3^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cos 36^\circ \quad \sqrt{\quad}$$

$$AE = 5.85 \Rightarrow AB = AE + EB \quad \Rightarrow \quad AB = 2 \cdot 5.85 = 11.7 \text{ ס"מ}$$

$\downarrow$
 $AE=EB$

נתבונן ב- $\triangle DMC$:

$$DC^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cos 36^\circ \quad \sqrt{\quad}$$

$$DC = 3.63 \Rightarrow BC = BD + DC, \quad BD = DC \Rightarrow BC = 2 \cdot 3.63 = 7.26 \text{ ס"מ}$$

תשובה: $AB = 11.7 \text{ ס"מ}, BC = 7.26 \text{ ס"מ}$

ב. נתבונן ב- $\triangle ADB$. נסמן: $\angle ADB = \alpha$

לפי משפט הקוסינוסים:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad \text{נבודד מתוך הנוסחה את } \cos \gamma$$

נציב על-פי הנתונים:

$$\cos \alpha = \frac{AD^2 + BD^2 - AB^2}{2 \cdot AD \cdot BD}$$

$$\cos \alpha = \frac{12^2 + 3.63^2 - 11.7^2}{2 \cdot 12 \cdot 3.63} = 0.232$$

תשובה: $\alpha = 76.53$

הערה: תיכון מחלק משולש לשני משולשים שווי שטח, לשניהם צלע וגובה לצלע זהים.

ג. לכן: $S_{\Delta ABD} = S_{\Delta ADC}$

$$S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta ABD} = \cancel{2} \cdot \frac{AD \cdot BD \cdot \sin \alpha}{\cancel{2}} = 12 \cdot 3.63 \cdot \sin 76.53^\circ$$

תשובה: $S_{\Delta ABC} = 42.36$ סמ"ר

ד. נמצא את $\sphericalangle ABC$

$$S_{\Delta ABD} = \frac{AB \cdot BD \cdot \sin \sphericalangle ABC}{2}$$

$$\frac{11.7 \cdot 3.63 \cdot \sin \sphericalangle ABC}{2} = \frac{42.36}{2}$$

$$\sphericalangle ABC = 85.856^\circ$$

$$\sphericalangle EMD = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ \quad \text{זוויות צמודות}$$

↓

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle EMD = 229.85^\circ > 180^\circ \quad \text{לכן המרובע אינו בר חסימה.}$$

ה. $AC^2 = 11.7^2 + 7.26^2 - 2 \cdot 7.26 \cdot 11.7 \cdot \cos 85.856^\circ$

$$AC =_{\text{ס"מ}} 13.32$$

$$\frac{13.32}{\sin 85.856^\circ} = 2R$$

$$R =_{\text{ס"מ}} 6.68$$

פתרון שאלה 6

א. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+16}}$

נגזור לקבלת שיפוע המשיק:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2\sqrt{x^2+16} - 2x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}}{x^2+16} = \frac{2(x^2+16) - 2x^2}{\sqrt{x^2+16} \cdot (x^2+16)} \\ &= \frac{32}{(x^2+16)\sqrt{x^2+16}} \\ y'_{(x=0)} &= \frac{32}{64} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

משוואת המשיק בנקודה $(0,0)$:

תשובה: $y = \frac{1}{2}x$

ב. חישוב השטח: $\int_0^3 \left(\frac{1}{2}x - \frac{2x}{\sqrt{x^2+16}} \right) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - \underbrace{2\sqrt{x^2+16}}_* \Big|_0^3 =$

* הסבר למטה

תשובה: $= \left(\frac{3^2}{4} - 2\sqrt{25} \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{0^2}{2} - 2\sqrt{16} \right) = 0.25$

* נשתמש בשיטת "הניחוש" כלומר על פי זיהוי הנגזרת הפנימית או החיצונית. נגזור את הביטוי * כדי לבדוק שאכן מתקבל הביטוי בתוך האינטגרנט.

או * נשתמש בשיטת ההצבה:

נסמן: $u = x^2 + 16$

על-ידי גזירה של שני האגפים נקבל: $du = 2x dx$

$dx = \frac{du}{2x}$ נחליף ביטוי זה ב- dx באינטגרל

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+16}} dx &= \int \frac{2x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{2x} = \int \frac{1}{\sqrt{u}} du \\ &= 2\sqrt{u} = 2\sqrt{x^2+16} \end{aligned}$$

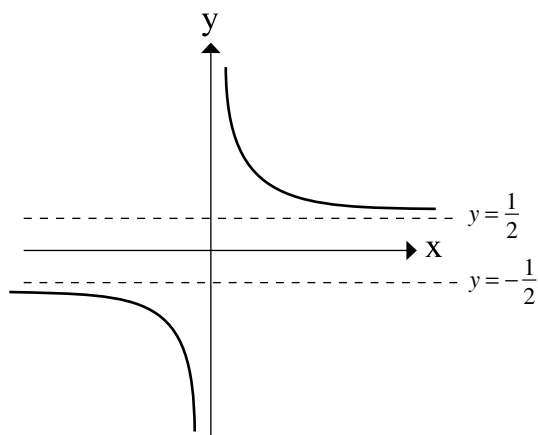
$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{2x} \quad \text{ג.}$$

1. תחום הגדרה: $x \neq 0$

$$g'(x) = \frac{\frac{2x \cdot 2x}{2\sqrt{x^2 + 16}} - 2\sqrt{x^2 + 16}}{(2x)^2} \Rightarrow g'(x) = \frac{2x^2 - 2(x^2 + 16)}{4x^2\sqrt{x^2 + 16}} \quad \text{נגזרת הפונקציה}$$

$$g'(x) = \frac{-32}{4x^2\sqrt{x^2 + 16}} < 0$$

$g'(x) < 0$ לכל $x \neq 0$ לכן הפונקציה יורדת לכל x בתחום הגדרתה.



2. גרף הפונקציה $g(x)$:

אסימפטוטות: $x = 0$

$$x \rightarrow +\infty \quad y = \frac{1}{2}$$

$$x \rightarrow -\infty \quad y = -\frac{1}{2}$$

$$V_1 = \pi \int_2^4 \left(\frac{\sqrt{x^2 + 16}}{2x} \right)^2 dx = \pi \int_2^4 \left(\frac{x^2 + 16}{4x^2} \right) dx \quad 3.$$

$$= \pi \int_2^4 \left(\frac{x^2}{4x^2} + \frac{16}{4x^2} \right) dx = \pi \int_2^4 \left(\frac{1}{4} + \frac{4}{x^2} \right) dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{4}x - \frac{4}{x} \right]_2^4 = \pi \left[(1 - 1) - \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \right] = 1.5\pi$$

$$V_2 = \pi \int_2^4 \left(\frac{1}{2} \right)^2 dx = \pi \left(\frac{1}{4}x \right) \Big|_2^4 = \pi - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi$$

תשובה: $V = 1.5\pi - 0.5\pi = \pi$

פתרון שאלה 7

א. $f(x) = x\sqrt{x} + 4$

נגזור פעמיים את הפונקציה כדי לבדוק את סימן הנגזרת השנייה:

$$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}\cancel{x}}{2\cancel{\sqrt{x}}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{2\sqrt{x} + \sqrt{x}}{2} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

$$f''(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{4\sqrt{x}}$$

הוא ביטוי חיובי לכל $x > 0$ ולכן כאשר $f''(x)$ הוא ביטוי חיובי, הפונקציה קעורה כלפי מעלה

בכל תחום הגדרתה.

ב. למציאת נקודת השקה נסמנה ב- $(t, t\sqrt{t} + 4)$ ונשווה בין שיפוע לפי נגזרת ובין שיפוע לפי נוסחה, כלומר:

שיפוע לפי נוסחה שיפוע לפי נגזרת

$$\boxed{m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}} \qquad f'(t) = \frac{\overset{\downarrow}{3\sqrt{t}}}{2} = \frac{\overset{\downarrow}{t\sqrt{t} + 4 - 0}}{t - 0} \Rightarrow \frac{3\sqrt{t}}{2} = \frac{t\sqrt{t} + 4}{t} \Rightarrow$$

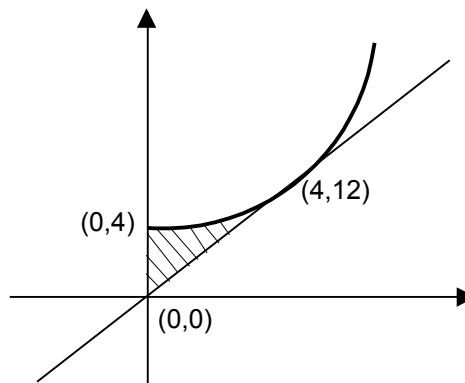
$$3t\sqrt{t} = 2t\sqrt{t} + 8 \Rightarrow t\sqrt{t} = 8 \quad / ()^2 \Rightarrow t^3 = 64 \Rightarrow t = 4$$

נקודת ההשקה: $(4, 12)$

שיפוע המשיק: $f'(4) = \frac{3\sqrt{4}}{2} = 3$

משוואת המשיק: $y = 3x$

ג.



חישוב השטח:

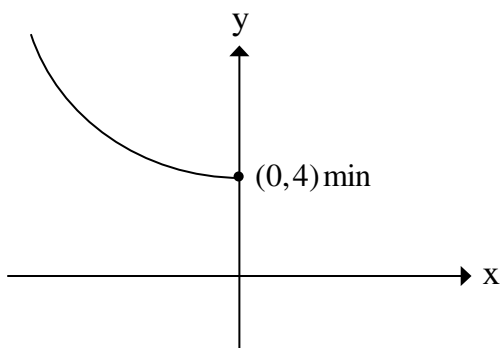
$$S = \int_0^4 (x\sqrt{x} + 4 - 3x) dx = \int_0^4 (x^{1.5} + 4 - 3x) dx =$$

$$= \frac{x^{2.5}}{2.5} + 4x - \frac{3x^2}{2} \Big|_0^4 = \frac{4^{2.5}}{2.5} + 4 \cdot 4 - \frac{3 \cdot 4^2}{2} = 4.8$$

$$V = \pi \int_0^4 (x\sqrt{x} + 4)^2 dx - \pi \int_0^4 (3x)^2 dx = \pi \int_0^4 (x^3 + 8x^{1.5} + 16) dx - \pi \int_0^4 9x^2 dx =$$

$$= \pi \left(\frac{x^4}{4} + \frac{8x^{2.5}}{2.5} + 16x \right) \Big|_0^4 - \pi \left(\frac{9x^3}{3} \right) \Big|_0^4 = \pi \left(\frac{4^4}{4} + \frac{8 \cdot 4^{2.5}}{2.5} + 16 \cdot 4 \right) - \pi \left(\frac{9 \cdot 4^3}{3} \right) =$$

$$= 230.4\pi - 192\pi = 38.4\pi$$



$$g(x) = f(x) = -x\sqrt{-x} + 4 = (-x)^{1.5} + 4 \quad \text{ה.}$$

תחום הגדרה: $-x \geq 0$

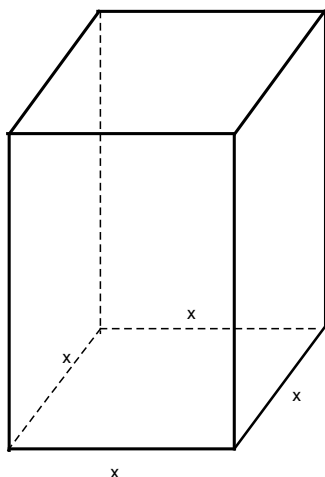
$$x \leq 0$$

$$g'(x) = -1.5(-x)^{0.5} = -1.5\sqrt{-x}$$

$$g''(x) = 0.25(-x)^{-0.5} = \frac{1}{4\sqrt{-x}}$$

$$g'(x) < 0 \quad \text{לכן } g(x) \text{ יורדת לכל } x \leq 0$$

$$g''(x) > 0 \quad \text{לכן } g(x) \text{ קעורה כלפי מעלה לכל } x \leq 0$$



פתרון שאלה 8

נסמן: צלע הבסיס x .

נתון כי נפח התיבה 400 סמ"ק.

נוסחה לחישוב נפח:

גובה X שטח הבסיס V

נקבל את גובה התיבה h מבוטא באמצעות x .

$$400 = x^2 \cdot h \Rightarrow h = \frac{400}{x^2}$$

שטח שני הבסיסים: $2x^2$.

עלות הבסיסים: $2x^2 \cdot 32 = 64x^2$

שטח ארבע פאות צדדיות: $4 \cdot x \cdot \frac{400}{x^2} = \frac{1600}{x}$ ועלותן: $16 \cdot \frac{1600}{x} = \frac{25600}{x}$

הפונקציה שנבנה מייצגת את ההוצאות על החומר:

$$f(x) = 64x^2 + \frac{25600}{x}$$

$$f'(x) = 128x - \frac{25600}{x^2} = 0$$

$$128x^3 - 25600 = 0$$

$$x^3 = 200$$

$$x = \sqrt[3]{200} \sim 5.84$$

x	0		5.84	
$f'(x)$		-	סוגים	+
$f(x)$		↘		↗

ממדי התיבה שעבורם ההוצאות על החומר מינימליות:

תשובה: אורך צלע הבסיס: $\sqrt[3]{200}$ ס"מ

גובה התיבה: $\frac{400}{(\sqrt[3]{200})^2} \approx 11.69$ ס"מ