

פתרון מבחן 17

פתרון שאלה 1

בשעה 20:00

נסמן: x – מספר התלמידים שהגיעו לנשף.

נקבל: $0.05x$ – מספר המורים שהגיעו לנשף (5% ממספר התלמידים שהגיעו).

הסבר:

מספר אנשים	אחוזים
y מורים	5 %
x תלמידים	100 %

הפרופורציה (שוויון של היחסים):

$$\frac{y}{x} = \frac{5}{100}$$

פתרון המשוואה (הנעלם הוא y):

$$y = \frac{5x}{100} = 0.05x$$

בשעה 22:00

הלכו: 10% מהמורים ו-20% מהתלמידים,

משמע, נשארו: 90% מהמורים ו-80% מהתלמידים,

נבטא את מספר הנשארים באמצעות x :

דרך החישוב:

תלמידים	אחוזים
x (תלמידים)	100 %
w (תלמידים)	80 %

מורים	אחוזים
0.05x (מורים)	100 %
z (מורים)	90 %

$$\frac{w}{x} = \frac{80}{100} \quad \text{הפרופורציה:}$$

פתרון המשוואה (הנעלם הוא w):

$$w = \frac{80x}{100} = 0.8x$$

$$\frac{z}{0.05x} = \frac{90}{100} \quad \text{הפרופורציה:}$$

פתרון המשוואה (הנעלם הוא z):

$$z = \frac{90 \cdot 0.05x}{100} = 0.045x$$

בשעה 22:00 נשארו $0.8x$ תלמידים ו- $0.045x$ מורים והגיעו שלושה תלמידים נוספים.

נבטא באמצעות x את מספר הנוכחים בנשף בשעה 22:00:

$$0.8x + 0.045x + 3 = 0.085x + 3$$

מספר הנוכחים בנשף בשעה 22:00 מהווה 85% ממספר התלמידים שהגיעו לנשף (כזכור, מספרם היה x)

מספר אנשים	אחוזים
$0.845x + 3$	85 %
x תלמידים	100 %

הפרופורציה :

$$\frac{0.845x + 3}{x} = \frac{85}{100}$$

פתרון המשוואה :

$$0.845x + 3 = 0.85x$$

$$0.005x = 3$$

$$x = 600$$

מספר המורים בהתאם (5%) : $600 \cdot 0.05 = 30$

תשובה : לנשף הגיעו 600 תלמידים ו-30 מורים.

פתרון שאלה 2

משוואת מעגל שמרכזו M היא: $x^2 + y^2 - 12x - 8y = 20$.

- מצאו את מרכז המעגל M ואת רדיוסו R.
- מעגל זה חותך את ציר y בשתי נקודות Q ו-R.
- דרך Q ו-R עוברים שני משיקים למעגל הנחתכים בנקודה T.
- מצאו את שיעורי הנקודה T.
- הראו שהמربع QTRM הוא ריבוע.
- מצאו את משוואת המעגל החוסם את הריבוע QTRM.

א. נמצא את מרכז המעגל M ואת רדיוסו R.

נעביר את משוואת המעגל לצורה המפורשת (ניעזר בהשלמה לריבוע על פי נוסחאות הכפל המקוצר):

$$x^2 + y^2 - 12x - 8y = 20$$

$$x^2 - 12x + y^2 - 8y = 20 \quad / \quad + 6^2 + 4^2$$

$$x^2 - 2 \cdot 6x + 6^2 + y^2 - 2 \cdot 4y + 4^2 = 20 + 6^2 + 4^2$$

$$x^2 - 2 \cdot 6x + 6^2 + y^2 - 2 \cdot 4y + 4^2 = 72$$

משוואת המעגל המפורשת היא:

$$(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 72$$

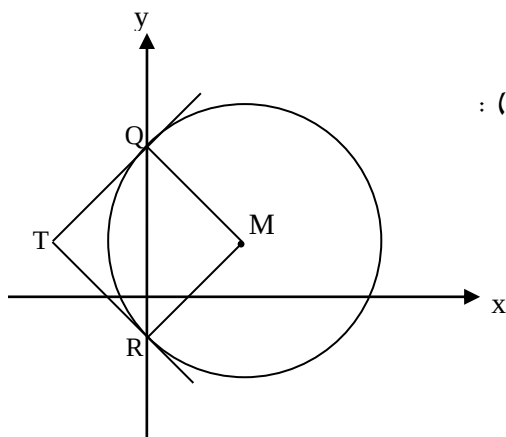
המרכז והרדיוס הם:

$$M = (6, 4) ; R = 6\sqrt{2}$$

ב. דרך TQ ו-RT משיקים למעגל.

נמצא את שיעורי הנקודה T.

הסרטוט (TR, TQ) משיקים למעגל שנמצא בסעיף א):



נקודות החיתוך של המעגל עם ציר y ($x = 0$):

נקודות החיתוך של המעגל עם ציר y : $Q(0, 10)$, $R(0, -2)$

נמצא את משוואות המשיקים:

המשיק ב-R	המשיק ב-Q
שיפוע הרדיוס המגיע לנקודת ההשקה R: $m_{RM} = \frac{-2 - 4}{0 - 6} = 1$ שיפוע המשיק בנקודה R: $m_{(R)} = -1$ משוואת המשיק בנקודה R: $y - (-2) = -1(x - 0)$ $y = -x - 2$	שיפוע הרדיוס המגיע לנקודת ההשקה Q: $m_{QM} = \frac{10 - 4}{0 - 6} = -1$ הרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה ולכן, שיפוע המשיק בנקודה Q: $m_{(Q)} = 1$ משוואת המשיק בנקודה Q: $y - 10 = 1(x - 0)$ $y = x + 10$

$$\begin{cases} y = x + 10 \\ y = -x - 2 \end{cases} \Rightarrow x + 10 = -x - 2 \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 4 \end{cases}$$

נקודת חיתוך המשיקים: $T = (-6, 4)$

ג. נראה שהמרובע QTRM הוא ריבוע.

$$m_{(RM)} = m_{(TQ)} = -1 \text{ ו- } m_{(QM)} = m_{(TR)} = 1$$

על פי תנאי ניצבות (מכפלת השיפועים של ישרים ניצבים היא -1) ניתן לקבוע שכל זוויות

המרובע QTRM ישרות ולכן המרובע הוא מלבן.

כמו כן, שתיים מהצלעות הסמוכות של המרובע QTRM הן רדיוסים ולכן שוות.

מלבן שבו שתי צלעות סמוכות שוות, הוא ריבוע.

ד. נמצא את משוואת המעגל החוסם את הריבוע QTRM.

אלכסוני הריבוע QTRM הם קטרים במעגל החוסם את הריבוע (מיתרים שנשענות עליהם זוויות היקפיות ישרות).

מרכז המעגל החוסם יהיה באמצע הקטע QR, כלומר:

רדיוס המעגל החוסם יהיה המרחק מ- $(0, 4)$ ל- $(0, 10)$. כלומר:

משוואת המעגל החוסם:

$$x^2 + (y - 4)^2 = 36$$

פתרון שאלה 3:

שלב א

נסמן ב P את ההסתברות שההודעה נגועה בוירוס.

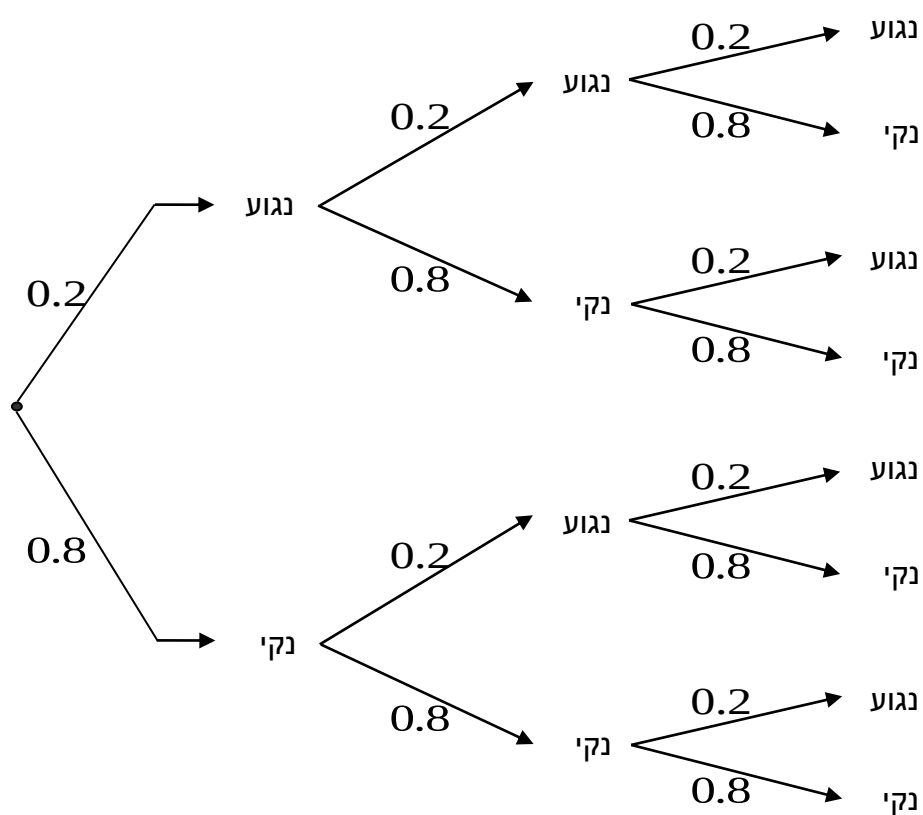
ההסתברות שההודעה נקייה מוירוס היא $(1-P)$ ונתון שהיא גדולה פי 4 מ P

$$1 - P = 4P \Rightarrow P = \frac{1}{5}$$

המשוואה:

שלב ב

נבנה את "עץ ההסתברויות" (המאורעות בלתי-תלויים). פתיחת כל הודעה לא משפיעה על תוצאות פתיחת ההודעה הבאה. לכן ההסתברויות לא משתנות מהודעה להודעה)



שלב ג – תשובות לשאלות :

א. ההסתברות ששלוש ההודעות נגועות בוירוס :

$$P(\text{נגועה, נגועה, נגועה}) = 0.2^3 = 0.008$$

ב. ההסתברות שלפחות אחת מההודעות נגועה בוירוס :

$$P(\text{לפחות אחת נגועה}) = 1 - P(\text{נקיה, נקיה, נקיה}) = 1 - 0.8^3 = 1 - 0.512 = 0.488$$

ג. ההסתברות שלכל היותר שתיים מההודעות נגועות בוירוס :

$$P(\text{לפחות שתיים נגועות}) = 1 - P(\text{שלוש נגועות}) = 1 - 0.2^3 = 1 - 0.008 = 0.992$$

ד. ההסתברות שההודעה השלישית נגועה בתנאי שהראשונה נקייה :

$$P(\text{ראשונה נקיה / שלישית נגועה}) = 0.8 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.2 = 0.2$$

דרך אחרת לחישוב – באמצעות הנוסחה להסתברות מותנית.

לצורך השימוש בנוסחה נחשב תחילה :

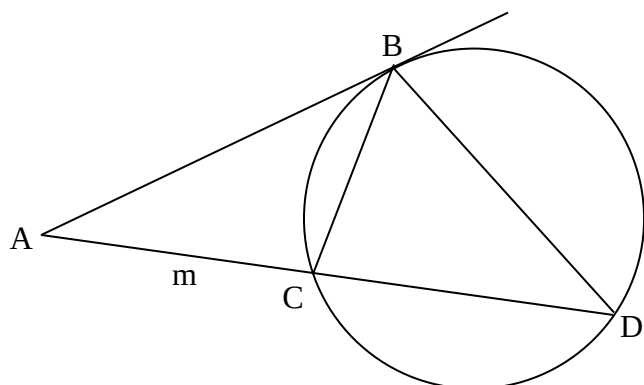
$$\begin{aligned} P(\text{נגועה, נקיה, נקיה}) + P(\text{נגועה, נגועה, נקיה}) &= P(\text{נגועה, נקיה, נקיה}) + P(\text{נגועה, נגועה, נקיה}) \\ &= 0.8 \cdot 0.2 \cdot 0.2 + 0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.2 \\ &= 0.16 \end{aligned}$$

וכעת נציב בנוסחת ההסתברות המותנית :

$$P(\text{ראשונה נקיה / שלישית נגועה}) = \frac{P(\text{ראשונה נקיה} \cap \text{שלישית נגועה})}{P(\text{ראשונה נקיה})} = \frac{0.16}{0.8}$$

$$P(\text{ראשונה נקיה / שלישית נגועה}) = 0.2$$

פתרון שאלה 4



נתונים:

AB משיק למעגל

$$S_{\triangle ADB} = 7 \cdot S_{\triangle ABC}$$

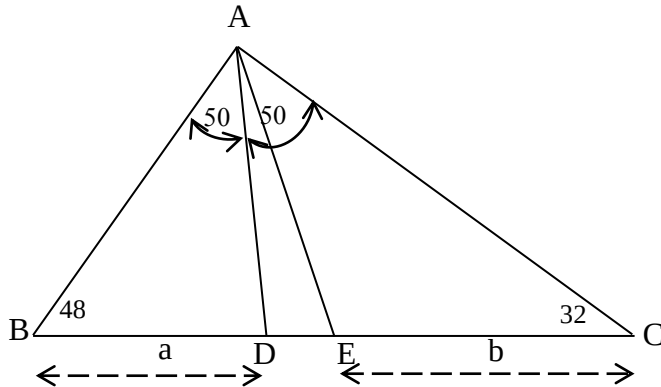
א. צייל: $\triangle ABC \sim \triangle ADB$

נימוק	טענה	
נתון	AB משיק למעגל	1.
זווית משותפת	$\angle BAC = \angle BAD$	2.
זווית בין משיק למיתר + סימון	$\angle ABC = \angle ADB = \alpha$	3.
ז.ז.	$\triangle ABC \sim \triangle ADB$	4.

ב. נתון: $AC = m$. נבטא באמצעות m את אורך הקטע CD:

נימוק	טענה	
נתון	$S_{\triangle ADB} = 7 \cdot S_{\triangle ABC}$	5.
פרופורציה במשולשים דומים	$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{BC}$	6.
נתון	$AC = m$	7.
יחס שטחי משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון ולכן, יחס הדמיון הוא השורש הריבועי של יחס שטחי המשולשים הדומים	$\frac{AB}{AC} = \sqrt{7}$ $AB = \sqrt{7} \cdot m$	8.
הצבת טענה 8 בפרופורציה 6	$\frac{AD}{\sqrt{7}m} = \frac{\sqrt{7}m}{m} = \frac{DB}{BC} = \sqrt{7}$	9.
פתרון המשוואה בסעיף 9	$AD = \sqrt{7} \cdot \sqrt{7}m$ $AD = 7m$	10.
חיסור קטעים	$CD = AD - AC = 7m - m$ $CD = 6m$	11.

פתרון שאלה 5



נתונים:

AE תיכון לצלע BC

AD חוצה את $\angle BAC$

$\angle ACB = 32^\circ$, $\angle ABC = 48^\circ$

$BD = a$, $EC = b$

א. חשבו את היחס: $\frac{b}{a}$

ב. נתון $a = 10$. חשבו את אורך הצלע AC ואת אורך התיכון AE.

פתרון:

א. נבטא את אורך הקטע AD בשני אופנים

חישוב זוויות:

$$\angle BAC = 180^\circ - 48^\circ - 32^\circ = 100^\circ$$

$$\angle BAD = \angle DAC = 50^\circ$$

AD חוצה זווית ולכן:

$$BE = EC = b$$

$$BC = 2b$$

$$DC = 2b - a$$

AE תיכון ולכן:

נבטא את AD באמצעות a ו-b במשולש ABD:

$$\frac{AD}{\sin 48^\circ} = \frac{a}{\sin 50^\circ}$$

$$AD = \frac{a \cdot \sin 48^\circ}{\sin 50^\circ}$$

$$AD = 0.97 \cdot a$$

נבטא את AD באמצעות a ו-b במשולש ADC:

$$\frac{AD}{\sin 32^\circ} = \frac{DC}{\sin 50^\circ}$$

$$\frac{AD}{\sin 32^\circ} = \frac{2b - a}{\sin 50^\circ}$$

$$AD = \frac{(2b - a) \cdot \sin 32^\circ}{\sin 50^\circ}$$

$$AD = 0.692 \cdot (2b - a)$$

נשווה את הביטויים שקיבלנו ונמצא את היחס $\frac{b}{a}$

$$0.692 \cdot (2b - a) = 0.97 \cdot a$$

$$1.384b - 0.692a = 0.97 \cdot a$$

$$1.384 \cdot b = 1.662 \cdot a$$

$$\frac{b}{a} = \frac{1.662}{1.384}$$

$$\frac{b}{a} = 1.2$$

ב. נתון $a = 10$

תכנון דרך הפתרון :

- נמצא את אורכו של הקטע BC.
- נמצא את אורכו של הקטע AC במשולש ABC.
- נמצא את אורכו של הקטע AE בעזרת משפט הקוסינוס.

$$\frac{b}{10} = 1.2$$

$$EC = b = 12$$

$$BC = 24$$

משפט הסינוסים במשולש ABC :

$$\frac{AC}{\sin 48} = \frac{BC}{\sin 100}$$

$$AC = \frac{24 \cdot \sin 48}{\sin 100}$$

$$AC = 18.11$$

משפט הקוסינוס במשולש AEC

$$AE^2 = AC^2 + EC^2 - 2 \cdot AC \cdot EC \cdot \cos 32$$

$$AE^2 = 18.11^2 + 12^2 - 2 \cdot 18.11 \cdot 12 \cdot \cos 32$$

$$AE^2 = 103.38$$

$$AE = 10.17$$

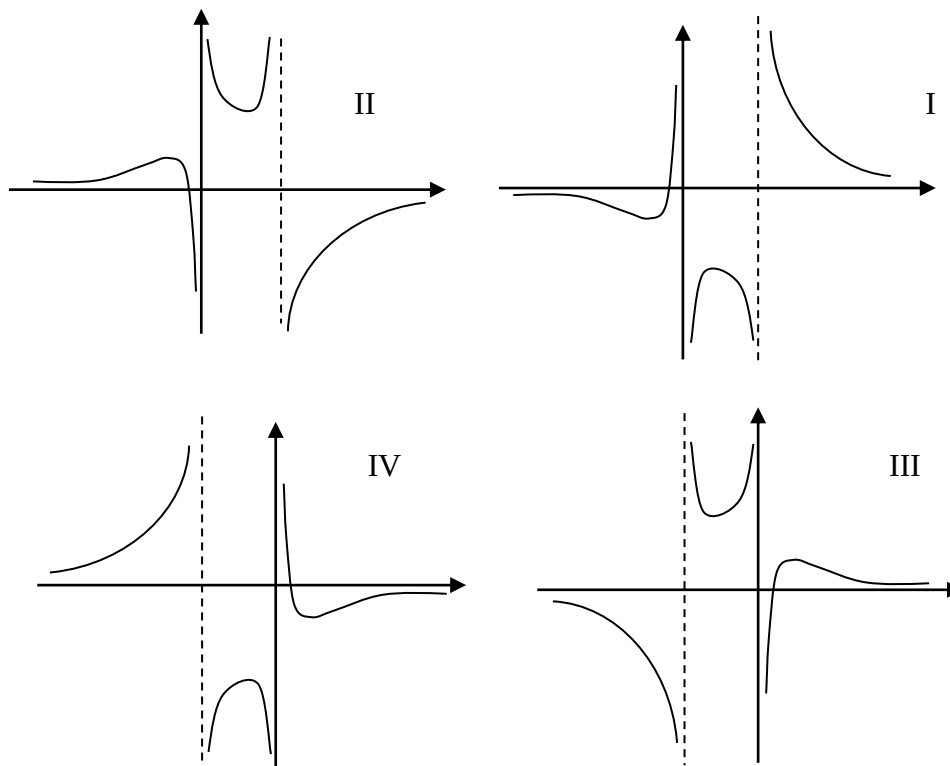
פתרון שאלה 6

א. נמצא איזה גרף מתאר איזו פונקציה :

הפונקציות :

$$f(x) = \frac{4x-1}{x^2+2x} \quad \text{ד.} \quad f(x) = \frac{4x+1}{x^2-2x} \quad \text{ג.} \quad f(x) = \frac{-4x+1}{x^2+2x} \quad \text{ב.} \quad f(x) = \frac{-4x-1}{x^2-2x} \quad \text{א.}$$

הגרפים :



נבדוק תחום הגדרה ואסימפטוטות אנכיות :

בכל הפונקציות $x \neq 0$ ויש אסימפטוטה אנכית ב- $x = 0$.

בפונקציות (א) ו-(ג) תחום ההגדרה הוא $x \neq 2$ והאסימפטוטה האנכית היא $x = 2$.

הגרפים המתאימים לפונקציות (א) ו-(ג) הם I ו-II.

בפונקציות (ב) ו-(ד) תחום ההגדרה הוא $x \neq -2$ והאסימפטוטה האנכית היא $x = -2$.

הגרפים המתאימים לפונקציות (ב) ו-(ד) הם III ו-IV.

בדיקת נקודת החיתוך עם ציר x הפעם לא תתרום אינפורמציה נוספת :

חישוב הנקודה בפונקציות (א) ו-(ג) מראה שבשתיהן הנקודה היא $(-0.25, 0)$ ונקודה זו

מתאימה לשני הגרפים I ו-II.

באותו אופן, נקודת החיתוך עם ציר x בפונקציות (ב) ו-(ד) היא $(0.25, 0)$ והיא מתאימה לשני

הגרפים III ו-IV.

נגזור את הפונקציות ונשלים את הזיהוי על פי נקודות הקיצון ותחומי העלייה ותחומי הירידה.

ב. $f'(x) = \left[\frac{-4x+1}{x^2+2x} \right]$ $f'(x) = \frac{-4(x^2+2x) - (-4x+1)(2x+2)}{(x^2+2x)^2}$ $f'(x) = \frac{-4(x^2+2x) - 2(-4x+1)(x+1)}{(x^2+2x)^2}$ $f'(x) = \frac{-4x^2 - 8x + 8x^2 + 6x - 2}{(x^2+2x)^2}$ $f'(x) = \frac{4x^2 - 2x - 2}{(x^2+2x)^2} = \frac{2(2x^2 - x - 1)}{(x^2+2x)^2}$ $f'(x) = \frac{2(2x+1)(x-1)}{(x^2+2x)^2}$ נקודות הקיצון הן : (-0.5 , -4) ; (1 , -1)	א. $f'(x) = \left[\frac{-4x-1}{x^2-2x} \right]$ $f'(x) = \frac{-4(x^2-2x) - (-4x-1)(2x-2)}{(x^2-2x)^2}$ $f'(x) = \frac{-4(x^2-2x) + 2(4x+1)(x-1)}{(x^2-2x)^2}$ $f'(x) = \frac{-4x^2 + 8x + 8x^2 - 6x - 2}{(x^2-2x)^2}$ $f'(x) = \frac{4x^2 + 2x - 2}{(x^2-2x)^2} = \frac{2(2x^2 + x - 1)}{(x^2-2x)^2}$ $f'(x) = \frac{2(2x-1)(x+1)}{(x^2-2x)^2}$ נקודות הקיצון הן : (-1 , 1) ; (0.5 , 4)
ד. $f'(x) = \left[\frac{4x-1}{x^2+2x} \right]$ $f'(x) = \frac{4(x^2+2x) - (4x-1)(2x+2)}{(x^2+2x)^2}$ $f'(x) = \frac{4(x^2+2x) - 2(4x-1)(x+1)}{(x^2+2x)^2}$ $f'(x) = \frac{4x^2 + 8x - 8x^2 - 6x + 2}{(x^2+2x)^2} +$ $f'(x) = \frac{-4x^2 + 2x + 2}{(x^2+2x)^2} = \frac{-2(2x^2 - x - 1)}{(x^2+2x)^2}$ $f'(x) = \frac{-2(2x+1)(x-1)}{(x^2+2x)^2}$ נקודות הקיצון הן : (-0.5 , 4) ; (1 , 1)	ג. $f'(x) = \left[\frac{4x+1}{x^2-2x} \right]$ $f'(x) = \frac{4(x^2-2x) - (4x+1)(2x-2)}{(x^2-2x)^2}$ $f'(x) = \frac{4(x^2-2x) - 2(4x+1)(x-1)}{(x^2-2x)^2}$ $f'(x) = \frac{4x^2 - 8x - 8x^2 + 6x + 2}{(x^2-2x)^2}$ $f'(x) = \frac{-4x^2 - 2x + 2}{(x^2-2x)^2} = \frac{-2(2x^2 + x - 1)}{(x^2-2x)^2}$ $f'(x) = \frac{-2(2x-1)(x+1)}{(x^2-2x)^2}$ נקודות הקיצון הן : (-1 , -1) ; (0.5 , -4)

על פי מיקום נקודות הקיצון, גם בלי למצוא את סוגן, ניתן לקבוע :

פונקציה (א) מתוארת באמצעות גרף II

פונקציה (ב) מתוארת באמצעות גרף IV

פונקציה (ג) מתוארת באמצעות גרף I

פונקציה (ד) מתוארת באמצעות גרף III.

ב. נמשיך ונשלים את המידע הדרוש על פונקציה g : $f(x) = \frac{4x+1}{x^2-2x}$

עד כה ידוע לנו :

תחום ההגדרה: $x \neq 0, 2$

אסימפטוטות אנכיות: $x = 0, x = 2$

אסימפטוטות אופקיות:

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+1}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x^2} = +0$$

*

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x+1}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{x^2} = -0$$

נקודות הקיצון וקביעת סוגן על פי הגרף הנתון :

(-1, -1) מינימום

(0.5, -4) מקסימום

תחומי עלייה: $-1 < x < 1$

תחומי ירידה: $x < -1$; $1 < x < 2$; $x > 2$

הבהרה :

(*) כאשר האסימפטוטה היא $y = +0$ המשמעות היא שהגרף יתקרב לישר $y = 0$ כשהוא מעל ציר x .

כאשר האסימפטוטה היא $y = -0$ המשמעות - הגרף יתקרב לישר $y = 0$ כשהוא מתחת לציר x .

(כמתואר בסרטוט I).

פתרון שאלה 7

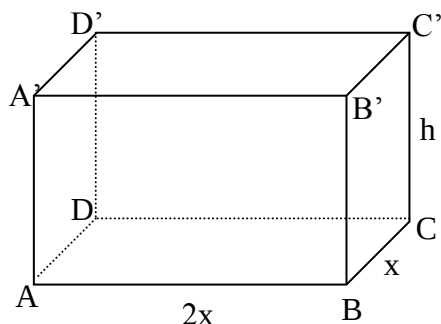
נתונים (הדרישות):

תיבה סגורה שבה הבסיס מלבן שאורכו כפול מרוחבו.

נפח התיבה 1.944 מ"ק.

א. מה צריכים להיות ממדי התיבה כך ששטח הפלדה הדרוש יהיה מינימלי?

ב. מה תהיה עלות הפלדה לתיבה אם מחיר הפלדה הוא 500 ש"ח למ"ר?



פתרון:

א. שטח הפלדה הדרוש משמעו שטח הפנים של התיבה.

נמצא מהם ממדי התיבה כדי ששטח הפנים יהיה מינימלי.

שלב א

נסמן את רוחב התיבה ב- x .

אורכה כפול מרוחבה ולכן אורכה $2x$.

נשתמש בנתון על נפח התיבה ונבטא באמצעות x את גובה התיבה:

$$V = AB \cdot BC \cdot CC'$$

$$1.944 = 2x \cdot x \cdot h$$

$$h = \frac{0.972}{x^2}$$

שלב ב

נבטא את שטח הפנים של התיבה כפונקציה של x :

$$P = 2(AB \cdot BC + BC \cdot CC' + AB \cdot BB')$$

$$P(x) = 2(2x \cdot x + x \cdot h + 2x \cdot h)$$

$$P(x) = 2\left(2x^2 + x \cdot \frac{0.972}{x^2} + 2x \cdot \frac{0.972}{x^2}\right)$$

$$P(x) = 4x^2 + \frac{1.944}{x} + \frac{3.888}{x}$$

$$P(x) = 4x^2 + \frac{5.832}{x}$$

שלב ג

נגזור את הפונקציה שקיבלנו ונמצא את נקודות הקיצון שלה:

$$P'(x) = 8x - \frac{5.832}{x^2}$$

$$P'(x) = \frac{8x^3 - 5.832}{x^2}$$

$$P'(x) = 0$$

$$8x^3 - 5.832 = 0$$

$$x^3 = 0.729$$

$$x = 0.9$$

שלב ד

נבדוק שערך ה- x שקיבלנו הוא ערך מינימלי של הפונקציה $P(x)$:

דרך ג באמצעות טבלה				דרך ב באמצעות גזירת המונה של $P'(x)$	דרך א באמצעות הנגזרת השנייה
x	$0 < x < 0.9$	0.9	$x > 0.9$	$[P'(x)]' = 24x^2$ $[P'(0.9)]' = 24(0.9)^2 > 0$ ולכן הנקודה מינימום <u>הערה:</u> הוכחה לנכונות הדרך ראו בנספח 2 חלק ג	$P'(x) = \frac{8x^3 - 5.832}{x^2}$ $P''(x) = \frac{24x^2 \cdot x^2 - 2x(8x^3 - 5.832)}{x^4}$ $P''(x) = \frac{24x^4 - 16x^4 + 11.664x}{x^4}$ $P''(x) = \frac{8x^4 + 11.664x}{x^4}$ $P''(0.9) = \frac{8(0.9)^4 + 11.664(0.9)}{(0.9)^4} > 0$ אם $P''(0.9) > 0$ אז הנקודה מינימום
y'	-	0	+		
		min			
בדיקת סימן הנגזרת בנקודה מייצגת: $P'(0.1) = \frac{8(0.1)^3 - 5.832}{(0.1)^2} < 0$ $P'(1) = \frac{8(1)^3 - 5.832}{(1)^2} > 0$					

תשובה: ממדי התיבה שבהם שטח הפנים יהיה מינימלי:

$$h = \frac{0.972}{(0.9)^2} = 1.2 \text{ רטם}, \quad 2x = 1.8 \text{ רטם}, \quad x = 0.9 \text{ רטם}$$

ב. מחיר הפלדה 500 ₪ למ"ר.

שטח הפנים הוא:

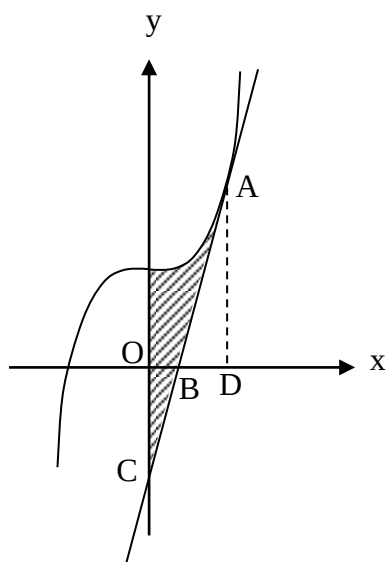
$$P(x) = 4x^2 + \frac{5.832}{x}$$

$$P(0.9) = 4(0.9)^2 + \frac{5.832}{0.9} = 9.72 \text{ מ"ר}$$

$$9.72 \times 500 = 4860$$

תשובה: עלות הפלדה הדרושה לייצור התיבה היא 4,860 שקלים.

פתרון שאלה 8



הגרף שבציור מתאר את הפונקציה: $f(x) = 2x^3 - k$
הישר $y = 24x + k$ משיק לגרף בנקודה A ברביע ראשון.

א. נמצא את ערכו של הפרמטר k :

בנקודת השקה השיפועים של שני הגרפים שווים:

$$\begin{cases} f'(x) = 6x^2 \\ y' = 24 \end{cases}$$

$$6x^2 = 24$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 ; x = -2$$

ברביע הראשון מתאימה התוצאה $x = 2$.

בנקודת ההשקה גם ערכי ה- y שווים. נציב את הערך שמצאנו ונשווה:

$$\begin{cases} f(2) = 2 \cdot 2^3 - k \\ y = 24 \cdot 2 + k \end{cases}$$

$$16 - k = 48 + k$$

$$2k = -32$$

$$\underline{k = -16}$$

ב. נחשב את השטח המקווקו:

על פי הממצא בסעיף א, הפונקציה: $f(x) = 2x^3 + 16$ והישר: $y = 24x - 16$,

נמצא את שיעורי נקודה A (נזדקק לשיעור ה- y בהמשך לצורך חישוב שטח המשולש):

$$x = 2$$

$$y = 24 \cdot 2 - 16 = 32 \quad \text{הצבה בישר:}$$

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 + 16 = 32 \quad \text{או הצבה ב } f(x):$$

$$A = (2, 32)$$

נמצא את נקודת החיתוך של הישר עם ציר x :

$$24x - 16 = 0$$

$$x = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

תכנון דרך חישוב השטח :

✍ נחשב את השטח הכלוא מתחת לגרף הפונקציה מ- $x = 0$ עד $x = 2$ (להלן S_1)

✍ נחסר את שטח המשולש ABD,

✍ נחבר את שטח המשולש OBC :

$$S_1 = \int_0^2 (2x^3 + 16) dx$$

$$S_1 = \left. \frac{x^4}{2} + 16x \right|_0^2$$

$$S_1 = \left(\frac{16}{2} + 16 \cdot 2 \right) - 0$$

$$S_1 = 40$$

שטח המשולש ABD :

$$S_{\triangle ABD} = \frac{(2 - \frac{2}{3}) \cdot 32}{2}$$

$$S_{\triangle ABD} = 21\frac{1}{3}$$

שטח המשולש OBC :

$$S_{\triangle OBC} = \frac{(\frac{2}{3}) \cdot 16}{2}$$

$$S_{\triangle OBC} = 5\frac{1}{3}$$

נחבר ונחסר את שלושת השטחים לקבלת השטח המבוקש :

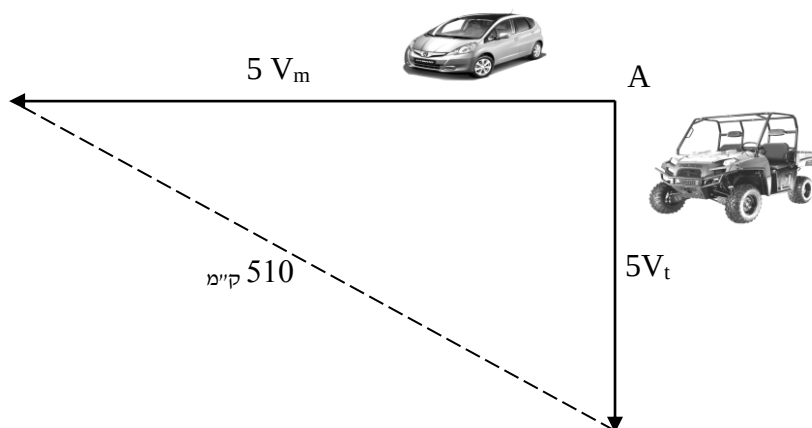
$$S_{\text{נדרש}} = (40 - 21\frac{1}{3}) + 5\frac{1}{3}$$

$$S_{\text{נדרש}} = 18\frac{2}{3} + 5\frac{1}{3}$$

$$\underline{S_{\text{נדרש}} = 24}$$

פתרון מבחן 18

פתרון שאלה 1



א. נסמן את מהירותה של המכונית ב- V_m ואת מהירות הטרקטורון ב- V_t . המכונית והטרקטורון יצאו בשעה 06:00 והמרחק ביניהם נמדד בשעה 11:00, כלומר כעבור 5 שעות בדיוק.

	T שעות	V קמ"ש	S ק"מ
מכונית	5	V_m	$5 V_m$
טרקטורון	5	V_t	$5 V_t$

נתון שבשעה 11:00 :

- המרחק ביניהם היה 510 ק"מ (משוואה אחת).
- המרחק של המכונית מנקודת המוצא היה גדול ב-210 ק"מ מהמרחק של הטרקטורון מנקודת המוצא (משוואה שנייה)

נבטא את הנתונים במשוואות הבאות :

$$\begin{cases} (5V_m)^2 + (5V_t)^2 = 510^2 \\ 5V_m = 5V_t + 210 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25V_m^2 + 25V_t^2 = 260,100 & / : 25 \\ 5V_m = 5V_t + 210 & / : 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_m^2 + V_t^2 = 10,404 \\ V_m = V_t + 42 \end{cases}$$

$$(V_t + 42)^2 + V_t^2 = 10,404$$

$$2V_t^2 + 2 \cdot 42 \cdot V_t - 8,640 = 0$$

$$V_t^2 + 42V_t - 4,320 = 0$$

$$Vt^2 + 42Vt - 4,320 = 0$$

$$Vt_{1,2} = \frac{-42 \pm \sqrt{42^2 - 4 \cdot (-4320)}}{2}$$

$$Vt_{1,2} = \frac{-42 \pm \sqrt{19044}}{2} = \frac{-42 \pm 138}{2}$$

$$Vt_1 = 48, \quad Vt_2 = \text{יליטש}$$

$$Vm = 48 + 42$$

$$Vm = 90$$

מהירות הטרקטורון : 48 קמ"ש

מהירות המכונית : 90 קמ"ש

ב. נסמן את מספר השעות שנסע הטרקטורון מרגע יציאתו עד הרגע בו היה המרחק ביניהם 636

ק"מ ב-t

S ק"מ	V קמ"ש	T שעות	
48 t	48	t	טרקטורון
90(t-1)	90	t-1	מכונית

כעבור t שעות המרחק ביניהם היה 636 ק"מ :

$$(48t)^2 + [90(t-1)]^2 = 636^2$$

$$2304t^2 + 8100(t^2 - 2t + 1) - 404,496 = 0$$

$$10,404t^2 - 16,200t - 396,396 = 0 \quad / : 36$$

$$289t^2 - 450t - 11,011 = 0$$

$$289t^2 - 450t - 11,011 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{450 \pm \sqrt{450^2 - 4 \cdot 289 \cdot (-11011)}}{2 \cdot 289}$$

$$t_{1,2} = \frac{450 \pm 3596}{578}$$

$$t_1 = 7, \quad t_2 < 0$$

הטרקטורון נסע 7 שעות.

(המכונית נסעה 6 שעות).

פתרון שאלה 2

משולש ABC שווה-שוקיים ($AC = BC$).

בסיס המשולש, AB, מונח על הישר $x - 4y + 12 = 0$.

שניים מקדקודי המשולש הם: $(4, 4)$; $(-1, -10)$.

א. נבדוק איזה מהקדקודים הנתונים נמצא על הבסיס:

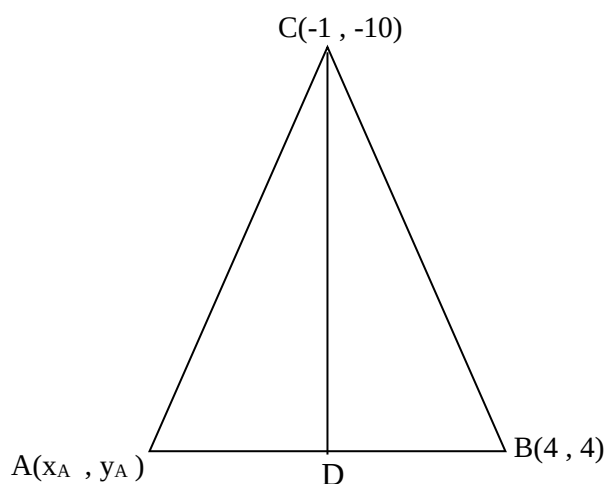
הצבת הנקודה $(4, 4)$:

$$4 - 4 \cdot 4 + 12 = 4 - 16 + 12 = 0$$

הצבת הקדקוד $(-1, -10)$:

$$(-1) - 4 \cdot (-10) + 12 = -1 + 40 + 12 \neq 0$$

מסקנה: הקדקוד $(-1, -10)$ איננו על הבסיס. נקודה זו היא קדקוד הראש של המשולש שווה-השוקיים.



הישר עליו מונח הבסיס בצורתו הנתונה וצורתו המפורשת:

$$x - 4y + 12 = 0$$

$$y = \frac{1}{4}x + 3$$

שיפוע הישר עליו נמצא הבסיס הוא $\frac{1}{4}$.

על פי תנאי ניצבות, שיפוע הגובה AD הוא $m = -4$.

משוואת ישר על פי נקודה C והשיפוע שמצאנו:

$$y - (-10) = -4(x - (-1))$$

$$y + 10 = -4(x + 1)$$

$$y = -4x - 14$$

משוואת הגובה לבסיס היא: $y = -4x - 14$

ב. נמצא את נקודה D – חיתוך בין הגובה לבסיס :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x + 3 \\ y = -4x - 14 \end{cases}$$

$$\frac{1}{4}x + 3 = -4x - 14$$

$$4\frac{1}{4}x = -17$$

$$x = -4$$

$$y = 2$$

$$D = (-4, 2)$$

נמצא את A על פי נקודת אמצע (במשולש שווה-שוקיים הגובה לבסיס הוא גם תיכון) :

$$\frac{x_A + 4}{2} = -4 \quad ; \quad \frac{y_A + 4}{2} = 2$$

$$x_A = -12 \quad ; \quad y_A = 0$$

$$A = (-12, 0)$$

ג. שטח = מחצית מכפלת הבסיס והגובה :

$$AB = \sqrt{16^2 + 4^2} = \sqrt{272} \approx 16.49$$

$$CD = \sqrt{12^2 + 3^2} = \sqrt{153} \approx 12.39$$

$$S = \frac{\sqrt{272} \cdot \sqrt{153}}{2} = 102$$

שטח המשולש הוא 102 יחידות שטח.

פתרון שאלה 3

ההסתברות שלמשפחה יש מכונית היא m . בוחרים באקראי חמש משפחות. ידוע שההסתברות שלארבע מהן יש מכונית גדולה פי 8 מההסתברות שלשתיים מהן יש מכונית.

א. נתון: $P(\text{יש מכונית}) = m$

נבטא באמצעות m את ההסתברות שלארבע משפחות יש מכונית (ניעזר בנוסחת ברנולי):

$$P(\text{לארבע משפחות יש מכונית}) = \binom{5}{4} \cdot m^4 \cdot (1-m)^{5-4}$$

$$P(\text{לארבע משפחות יש מכונית}) = \frac{5!}{4! \cdot 1!} m^4 \cdot (1-m) \quad / \quad 5! = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot 5 = 4! \cdot 5$$

$$P(\text{לארבע משפחות יש מכונית}) = \frac{4! \cdot 5}{4! \cdot 1} \cdot m^4 \cdot (1-m)$$

$$P(\text{לארבע משפחות יש מכונית}) = 5 \cdot m^4 \cdot (1-m)$$

נבטא באמצעות m את ההסתברות שלשתיים מהמשפחות יש מכונית:

$$P(\text{לשתי משפחות יש מכונית}) = \binom{5}{2} \cdot m^2 \cdot (1-m)^{5-2}$$

$$P(\text{לשתי משפחות יש מכונית}) = \frac{5!}{2! \cdot 3!} m^2 \cdot (1-m)^3$$

$$P(\text{לשתי משפחות יש מכונית}) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} m^2 \cdot (1-m)^3$$

$$P(\text{לשתי משפחות יש מכונית}) = 10 \cdot m^2 \cdot (1-m)^3$$

על פי הנתון:

$$5 \cdot m^4 \cdot (1-m) = 8 \cdot 10 \cdot m^2 \cdot (1-m)^3 \quad / \quad [5 \cdot m^2 \cdot (1-m)]$$

$$m^2 = 16 \cdot (1-m)^2$$

$$15m^2 - 32m + 16 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{32 \pm \sqrt{32^2 - 4 \cdot 15 \cdot 16}}{30} = \frac{32 \pm 8}{30}$$

$$\cancel{m_1 = 1\frac{1}{3}} \quad m_2 = \frac{4}{5} = 0.8$$

הפרמטר m מייצג הסתברות ולכן ערכו חייב לקיים: $0 \leq m \leq 1$

ולכן ההסתברות שלמשפחה יש מכונית היא 0.8

תשובה: ל-80% מהמשפחות יש מכונית.

ב. המאורע "לכל היותר" לשתי משפחות יש מכונית" הוא איחוד המאורעות: 'ל-0 משפחות יש מכונית' אֶן 'למשפחה אחת יש מכונית' אֶן 'לשתי משפחות יש מכונית'.
נחשב באמצעות נוסחת ברנולי את ההסתברות של שלושת המאורעות:

ההסתברות שלשתי משפחות יש מכונית:

$$P(2) = 10 \cdot m^2 \cdot (1-m)^3$$

$$P(2) = 10 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 = 10 \cdot \frac{16}{25} \cdot \frac{1}{125} = \frac{160}{3125} = 0.0512$$

ההסתברות שלמשפחה אחת יש מכונית:

$$P(1) = \binom{5}{1} \cdot 0.8^1 \cdot 0.2^4$$

$$P(1) = \frac{5!}{1! \cdot 4!} \cdot 0.8^1 \cdot 0.2^4$$

$$P(1) = 5 \cdot 0.8^1 \cdot 0.2^4 = 0.0064$$

ההסתברות שלאפס משפחות יש מכונית:

$$P(0) = \binom{5}{0} \cdot 0.8^0 \cdot 0.2^5$$

$$P(0) = 1 \cdot 0.8^0 \cdot 0.2^5$$

$$P(0) = 0.00032$$

ההסתברות שלכל היותר לשתי משפחות יש מכונית:

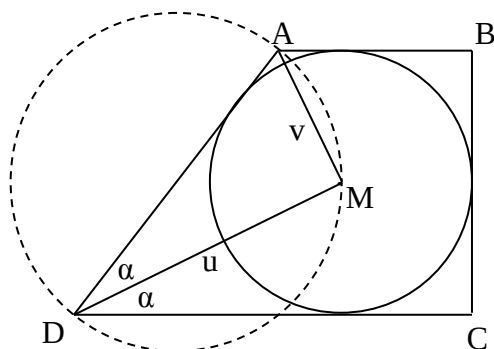
$$0.0512 + 0.0064 + 0.00032 = \underline{\underline{0.05792}}$$

פתרון שאלה 4

בטרפז ישר-זווית ABCD שבו $AB \parallel CD$, $\angle B = \angle C = 90^\circ$,

בטרפז חסום מעגל שמרכזו M.

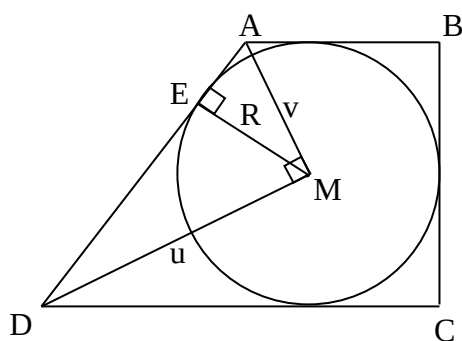
נתון: $DM = u$, $AM = v$



א. רדיוס המעגל החוסם את $\triangle AMD$:

נימוק	טענה	
נתון, המעגל חסום בטרפז	AB, AD, DC משיקים למעגל M	1.
קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודת חיתוך המשיקים למעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים + סימון	$\angle ADM = \angle MDC = \alpha$	2.
בטרפז, סכום זוויות שאינן על אותו בסיס הוא 180° (סכום זוויות חד-צדדיות במקבילים הוא 180°)	$\angle DAB = 180^\circ - \angle CDA = 180^\circ - 2\alpha$	3.
קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודת חיתוך המשיקים למעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים.	$\angle DAM = \angle MAB = 90^\circ - \alpha$	4.
סכום הזוויות בכל משולש 180°	$\angle AMD = 180^\circ - \angle ADM - \angle DAM$ $\angle AMD = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha)$ $\angle AMD = 90^\circ$	5.
מיתר שנשענת עליו זווית היקפית ישרה הוא קוטר	AD קוטר במעגל החוסם את $\triangle AMD$	6.
משפט פיתגורס במשולש ישר-זווית AMD	$AD^2 = AM^2 + MD^2$ $AD = \sqrt{u^2 + v^2}$	7.
הרדיוס שווה למחצית הקוטר	$r = \frac{AD}{2} = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{2}$	8.

ב. נבטא את שטח משולש AMD בשני אופנים ונשווה את הביטויים שיתקבלו :



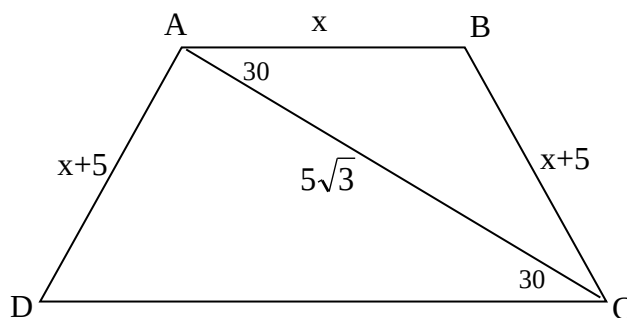
נסמן ב- R את רדיוס המעגל M המגיע לנקודת ההשקה E

הרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה	$ME \perp AD$	9.
נוסחת שטח משולש : $S_{\Delta} = \frac{\text{גובה} \cdot \text{בסיס}}{2}$	$S_{AMD} = \frac{ME \cdot AD}{2} = \frac{R \cdot \sqrt{u^2 + v^2}}{2}$	10.
נוסחת שטח משולש ישר-זווית : $S_{\Delta} = \frac{\text{ניצב} \cdot \text{ניצב}}{2}$	$S_{AMD} = \frac{AM \cdot MD}{2} = \frac{v \cdot u}{2}$	11.
השוואת שני הביטויים המייצגים אותו שטח ופתרון ל-R	$\frac{R \cdot \sqrt{u^2 + v^2}}{2} = \frac{v \cdot u}{2}$ $R \cdot \sqrt{u^2 + v^2} = v \cdot u$ $R = \frac{v \cdot u}{\sqrt{u^2 + v^2}}$	12.

פתרון שאלה 5

נתונים :

- טרפז שווה-שוקיים ABCD ($AD = BC$, $AB \parallel CD$, $AB < DC$)
- אורך השוק גדול ב-5 ס"מ מאורך הבסיס הקטן.
- אורך האלכסון AC הוא $5\sqrt{3}$ ס"מ
- $\angle ACD = 30^\circ$



א. חישוב אורכי הבסיס הקטן ושוקי הטרפז :

$AB \parallel CD$ ולכן $\angle ACD = \angle BAC = 30^\circ$ (זוויות מתחלפות בישרים מקבילים)

ניעזר במשפט הקוסינוס במשולש ABC :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC$$

$$(x+5)^2 = x^2 + (5\sqrt{3})^2 - 2x \cdot 5\sqrt{3} \cos 30$$

$$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 25 \cdot 3 - 2 \cdot 5 \cdot x \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$10x + 25 = 75 - 15x$$

$$25x = 50$$

$$x = 2$$

תשובה : אורך הבסיס הקטן : 2 ס"מ $AB =$

אורך כל שוק : 7 ס"מ $BC = AD =$

ב. חישוב אורך הבסיס הגדול :

נחשב תחילה את זווית הבסיס הקהה בטרפז וממנה נקבל את זווית הבסיס החדה בטרפז.

ניעזר במשפט הסינוסים :

$$\frac{AC}{\sin \angle B} = \frac{BC}{\sin 30}$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{\sin \angle B} = \frac{7}{0.5}$$

$$\sin \angle B = \frac{5\sqrt{3} \cdot 0.5}{7} = 0.6186$$

$$\angle B = 38.21^{\circ} \text{ וא } 180 - 38.21^{\circ} = 141.79^{\circ}$$

הזווית ABC קהה (על פי הנתון $AB < CD$) ולכן : $\sphericalangle ABC = 141.79^{\circ}$

בטרפז שווה-שוקיים זוויות הבסיס שוות ולכן : $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = 141.79^{\circ}$

סכום הזוויות המתאימות במקבילים הוא 180° ולכן : $\sphericalangle ADC = 38.21^{\circ}$

השלמת סכום הזוויות במשולש ADC נותנת : $\sphericalangle DAC = 180 - 38.21 - 30 = 111.79^{\circ}$

משפט הסינוסים במשולש ACD :

$$\frac{AD}{\sin 30} = \frac{DC}{\sin 111.79}$$

$$\frac{7}{0.5} = \frac{DC}{0.92855}$$

$$DC = 13 \text{ ס"מ}$$

פתרון שאלה 6

הפונקציה: $f(x) = x\sqrt{36 - 2x^2}$

שימו ♥: ניתן לרשום את הפונקציה גם בצורות הבאות: $f(x) = \sqrt{x^2(36 - 2x^2)} = \sqrt{36x^2 - 2x^4}$

ולהיעזר בצורות אלו לצורך ביצוע שלבים בחקירה בהתאם לנוחיות.

בפתרון שלהלן לא נעשה שימוש בצורות אלו.

א. חקירת הפונקציה:

תחום הגדרה:

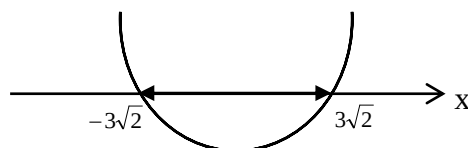
$$36 - 2x^2 \geq 0$$

$$18 - x^2 \geq 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$x^2 - 18 \leq 0$$

$$(x + \sqrt{18})(x - \sqrt{18}) \leq 0$$

$$(x + 3\sqrt{2})(x - 3\sqrt{2}) \leq 0$$



$$\underline{-3\sqrt{2} \leq x \leq 3\sqrt{2}}$$

חיתוך ציר y ($x = 0$):

$$f(0) = 0\sqrt{36 - 2 \cdot 0^2} = 0$$

$(0, 0)$

חיתוך ציר x ($y = 0$):

$$x\sqrt{36 - 2x^2} = 0$$

$$x = 0, \quad 36 - 2x^2 = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -3\sqrt{2}, \quad x_3 = 3\sqrt{2}$$

$$(0, 0), \quad (-3\sqrt{2}, 0), \quad (3\sqrt{2}, 0)$$

נגזרת (מכפלה ומורכבת) :

$$f'(x) = \sqrt{36-2x^2} + \frac{x \cdot (-4x)}{2\sqrt{36-2x^2}}$$

$$f'(x) = \sqrt{36-2x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{36-2x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{36-2x^2-2x^2}{\sqrt{36-2x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{36-4x^2}{\sqrt{36-2x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{-4(x^2-9)}{\sqrt{36-2x^2}} = \frac{-4(x+3)(x-3)}{\sqrt{36-2x^2}}$$

נקודות קיצון :

$$\frac{-4(x+3)(x-3)}{\sqrt{36-2x^2}} = 0$$

$$(x+3)(x-3) = 0$$

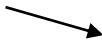
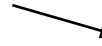
$$x_1 = -3, \quad x_2 = 3$$

חישוב שיעורי y של הנקודות :

$$f(-3) = -3\sqrt{36-2 \cdot 9} = -3\sqrt{18} = -9\sqrt{2} \approx -12.73$$

$$f(3) = 3\sqrt{36-2 \cdot 9} = 3\sqrt{18} = 9\sqrt{2} \approx 12.73$$

בדיקת סוג הנקודות ה"חשודות" :

x	$-3\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2} \leq x \leq -3$	-3	$-3 \leq x \leq 3$	3	$3 \leq x \leq 3\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$
$f'(x)$ סימן		-	0	+	0	-	
תיאור ומסקנות	max		min		max		min

ב. ריכוז הממצאים:

תחום הגדרה: $-3\sqrt{2} \leq x \leq 3\sqrt{2}$

חיתוך צירים: $(-3\sqrt{2}, 0)$, $(0, 0)$, $(3\sqrt{2}, 0)$

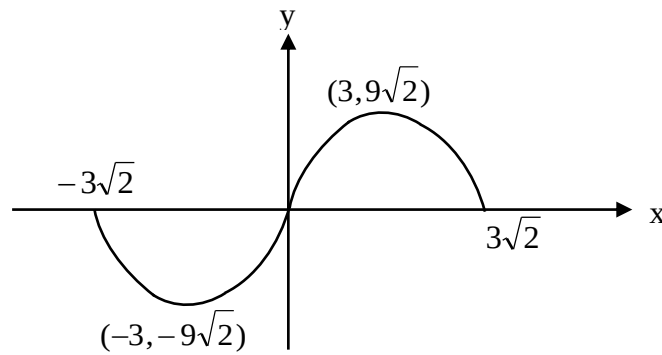
נקודות מקסימום: $(-3\sqrt{2}, 0)$, $(3, 9\sqrt{2})$

נקודות מינימום: $(3\sqrt{2}, 0)$, $(-3, -9\sqrt{2})$

תחומי ירידה: $-3\sqrt{2} < x < -3$ או $3 < x < 3\sqrt{2}$

תחום עלייה: $-3 < x < 3$

הסקיצה:



ג. ישר שמשוואתו $y = k$ הוא ישר המקביל לציר x .

הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות כאשר k מקיים:

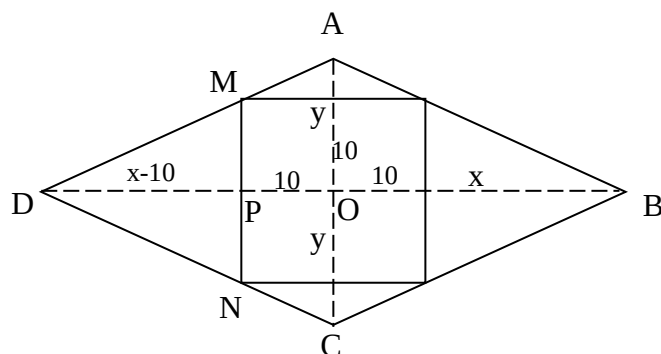
$$-9\sqrt{2} < k < 0 \text{ או } 0 < k < 9\sqrt{2}$$

כאשר $k = 0$ (ציר y) יש שלוש נקודות חיתוך.

כאשר $k = \pm 9\sqrt{2}$ יש נקודת חיתוך אחת.

כאשר $k > 9\sqrt{2}$ או $k < -9\sqrt{2}$ הישר לא חותך את גרף הפונקציה.

פתרון שאלה 7



נתונים:

ריבוע חסום במעוין.

אלכסוני המעוין מקבילים לצירים

היקף הריבוע 80 ס"מ.

פתרון:

היקף הריבוע = 80 ס"מ לכן אורך צלע הריבוע: $MN = 20$ ס"מ

נסמן:

$$AO = OC = y, BO = OD = x$$

(O מפגש אלכסוני המעוין. אלכסונים במעוין חוצים זה את זה).

נמצא את הקשר בין x ל-y ונבטא את y באמצעות x:

על פי הסימטריה (ניתן להוכיח גיאומטרית) קל לראות כי $PO = 10$ (מחצית צלע הריבוע)

ולכן $DP = x - 10$.

$MN \parallel AC$ (נתון) ולכן על פי משפט תאלס המורחב:

$$\frac{MN}{AC} = \frac{DP}{DO}$$

$$\frac{20}{2y} = \frac{x-10}{x}$$

$$10x = y(x-10)$$

$$y = \frac{10x}{x-10}$$

תנאי הצבה של $x > 10$.

נוסחת שטח של מעוין (מחצית המכפלה של האלכסונים):

$$S = \frac{AC \cdot DB}{2} = \frac{2x \cdot 2y}{2} = 2xy$$

נציב בנוסחת השטח ונקבל את שטח המעוין כפונקציה של מחצית האלכסון:

$$S(x) = \frac{20x^2}{x-10}$$

לצורך מציאת הערך המינימלי של השטחים המתקבלים באופן זה נגזור את הפונקציה:

$$S'(x) = \frac{40x(x-10) - 20x^2}{(x-10)^2}$$

$$S'(x) = \frac{10x^2 - 200x}{(x-10)^2} = 0$$

$$20x^2 - 400x = 0$$

$$20x(x-20) = 0$$

$$\cancel{x=0} \quad \text{וא} \quad x=20$$

התוצאה $x=0$ אינה מתאימה כי x מייצג אורך צלע שאינו יכול להיות אפס.

לבדיקת סוג הנקודה, די אם נגזור את מונה הנגזרת הראשונה (ראו הוכחה בנספח 2):

$$[S'(x)]' = 20x - 200$$

$$[S'(20)]' = 400 - 200 > 0 \Rightarrow \min$$

תשובה:

שטח המעוין יהיה מינימלי כאשר $x = 20$ ס"מ.

שטח המעוין יהיה מינימלי כאשר אורכי האלכסונים יהיו: $AC = 40$ ס"מ, $BD = 40$ ס"מ.

שימו ♥ : המעוין בעל השטח המינימלי הוא מעוין שאלכסוניו שווים ולכן הוא ריבוע.

פתרון שאלה 8

הפונקציה הנגזרת של $f(x)$ היא $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9$.
לפונקציה $f(x)$ ערך מקסימלי והוא 0.

א. מציאת הפונקציה $f(x)$:

מציאת הפונקציה הקדימה:

$$f(x) = \int (-3x^2 + 6x + 9) dx$$

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + C$$

מציאת ערך ה- x של נקודת המקסימום:

$$f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x+1)(x-3) = 0$$

$$x_1 = -1, x_2 = 3$$

בדיקה מי משתי הנקודות היא נקודת המקסימום:

$$f''(x) = -6x + 6$$

$$f''(-1) = 6 + 6 > 0 \Rightarrow \min$$

$$f''(3) = -18 + 6 < 0 \Rightarrow \max$$

נקודת המקסימום של הפונקציה היא: $(3, 0)$

נציב נקודה זו בפונקציה הקדימה למציאת ערך ה- C :

$$f(3) = -3^3 + 3 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + C = 0$$

$$27 + C = 0$$

$$C = -27$$

תשובה: הפונקציה: $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 27$

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה:

מצאנו שלפונקציה שתי נקודות קיצון. נקודת המקסימום - $(3, 0)$

הנקודה השנייה, $x = -1$:

$$f(-1) = -(-1)^3 + 3(-1)^2 + 9(-1) - 27$$

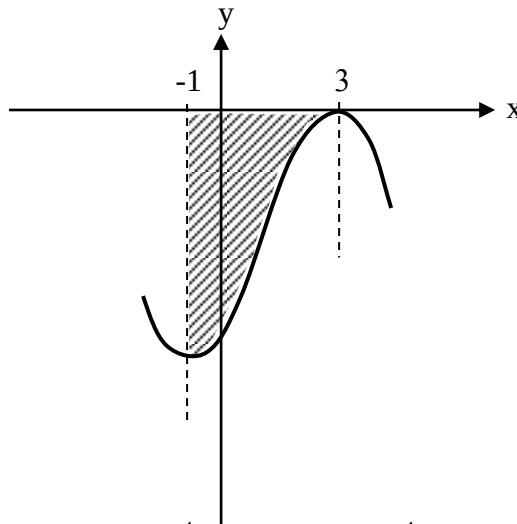
$$f(-1) = -32$$

תשובה: נקודות הקיצון הן: $\max (3, 0)$, $\min (-1, -32)$

ג. בנקודות הקיצון של הפונקציה העבירו ישרים המקבילים לציר y .
נחשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והישרים הללו.

פתרון:

הפונקציה היא פולינום שיש לו נקודת מינימום ב- $(-1, -32)$ ונקודת מקסימום ב- $(3, 0)$:
סקיצת הגרף וסימון השטח הנדרש:



מכיוון שהשטח נמצא מתחת לציר ה- x , האינטגרל ייתן את הערך הנגדי של השטח (כלומר, ערך שלילי).

לכן נסמן את ערך האינטגרל ב $(-S)$:

$$\begin{aligned} -S &= \int_{-1}^3 (-x^3 + 3x^2 + 9x - 27) dx \\ -S &= \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 + 4.5x^2 - 27x \right]_{-1}^3 \\ -S &= -\frac{3^4}{4} + 3^3 + 4.5 \cdot 3^2 - 27 \cdot 3 - \left[-\frac{(-1)^4}{4} + (-1)^3 + 4.5 \cdot (-1)^2 - 27 \cdot (-1) \right] \\ -S &= -20.25 + 27 + 40.5 - 81 + 0.25 + 1 + 4.5 - 27 \\ -S &= -55 \\ S &= 55 \end{aligned}$$

תשובה: השטח המתקבל הוא 55 יחידות שטח.

פתרון מבחן 19

פתרון שאלה 1

- א. נסמן ב- v את מהירותו הראשונה של האצן.
לאחר 6 ק"מ הגביר האצן את מהירותו ב- 25% כלומר מהירותו כעת היא $1.25v$.
נציב את הערכים בטבלה:

חלק א של הדרך	T שעות	V קמ"ש	S ק"מ
	$\frac{6}{v}$	v	6
חלק ב של הדרך	$\frac{5}{1.25v} = \frac{4}{v}$	$1.25v$	5

הזמן שרץ במהירות הנמוכה היה ארוך ב-15 דקות מהזמן שרץ במהירות הגבוהה.
נבנה משוואה מהידוע לנו על הזמנים:

$$\begin{aligned}\frac{6}{v} &= \frac{4}{v} + \frac{15}{60} \\ \frac{6}{v} - \frac{4}{v} &= \frac{1}{4} \\ \frac{2}{v} &= \frac{1}{4} \\ v &= 8\end{aligned}$$

מהירותו של האצן בתחילת הדרך 8 קמ"ש ולאחר הגברת המהירות: 10 קמ"ש $= 1.25 \cdot 8$
ההפרש בין המהירויות הוא 2 קמ"ש.

- ב. האצן סיים את החלק הראשון ב-45 דקות ואת החלק השני בחצי שעה.
את המסלול סיים בשעה ורבע סך-הכול.
ג. מהירות ממוצעת:

$$\text{מהירות ממוצעת} = \frac{\text{סה"כ דרך}}{\text{סה"כ זמן}}$$

$$\bar{v} = \frac{11}{1.25} = 8.8$$

המהירות הממוצעת: 8.8 קמ"ש.

פתרון שאלה 2

נתון מעגל: $(x-3)^2 + (y+6)^2 = 169$

הישר AB הוא קוטר שמונח על ישר שמאונך לישר $5y - 12x = 30$

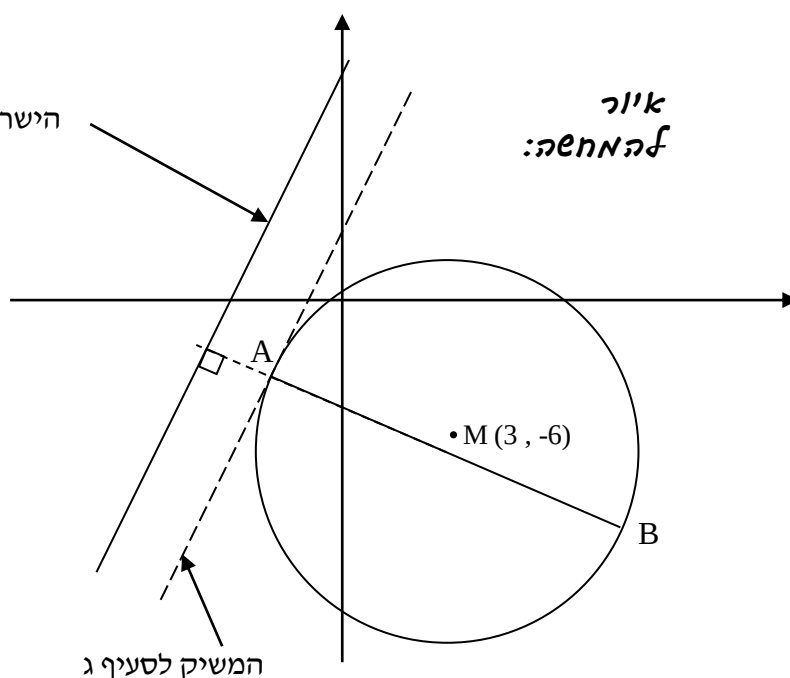
א. נמצא את משוואת הקוטר המאונך לישר $5y - 12x = 30$.
למציאת משוואה של ישר יש למצוא את שיפועו ונקודה אחת הנמצאת עליו.

לאיתור שיפוע הישר הנתון נעביר את המשוואה לצורה המפורשת:

$$5y - 12x = 30$$

$$5y = 12x + 30$$

$$y = \frac{12}{5}x + 6 \quad \text{הישר הנתון:}$$



$$m_r = -\frac{5}{12}$$

שיפוע הקוטר הניצב לישר זה הוא (הופכי ונגדי על פי תנאי ניצבות):

$$M(3, -6)$$

הקוטר עובר במרכז המעגל שהוא:

משוואת הקוטר AB (על פי שיפוע ונקודה):

$$y - (-6) = -\frac{5}{12}(x - 3)$$

$$y = -\frac{5}{12}x + \frac{15}{12} - 6$$

$$y = -\frac{5}{12}x - 4\frac{3}{4}$$

תשובה: משוואת הקוטר היא: $y = -\frac{5}{12}x - 4\frac{3}{4}$ או בצורה הכללית: $5x + 12y + 57 = 0$

ב. נמצא את נקודות החיתוך של הקוטר עם המעגל הנתון $(x-3)^2 + (y+6)^2 = 169$.
לצורך כך נפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y+6)^2 = 169 \\ y = -\frac{5}{12}x - 4\frac{3}{4} \end{cases}$$

לצורך הפשטות נבטא במשוואה הליניארית את $(y+6)$ באמצעות x :

$$\begin{aligned} y &= -\frac{5}{12}x - 4\frac{3}{4} \quad / +6 \\ y+6 &= -\frac{5}{12}x + 1\frac{1}{4} \\ y+6 &= -\frac{5}{12}x + \frac{15}{12} = \frac{-5x+15}{12} \end{aligned}$$

כעת נציב את $(y+6)$ במשוואה הריבועית ונפתור:

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + \left(\frac{-5x+15}{12}\right)^2 &= 169 \quad / \cdot 12^2 \\ 144(x-3)^2 + (-5x+15)^2 &= 169 \cdot 144 \\ 144(x^2 - 6x + 9) + 25x^2 - 150x + 225 &= 24,336 \\ 144x^2 - 864x + 1,296 + 25x^2 - 150x + 225 - 24,336 &= 0 \\ 169x^2 - 1,014x - 22,815 &= 0 \quad / : 169 \\ x^2 - 6x - 135 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{6 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{6 \pm 24}{2} \\ x_1 &= 15 \quad x_2 = -9 \\ y_1 &= -11 \quad y_2 = -1 \end{aligned}$$

תשובה: קצות הקוטר AB הם: $A(-9, -1)$, $B(15, -11)$

ג. נמצא את משוואת המשיק בנקודה בה שיעור ה- x שלילי, כלומר בנקודה $A(-9, -1)$.

$$\begin{aligned} \text{המשיק מאונך לרדיוס המגיע לנקודת ההשקה } A \text{ ולכן מקביל לישר הנתון} \\ y = \frac{12}{5}x + 6 \\ m = \frac{12}{5} \end{aligned}$$

מכאן, שיפועו של המשיק הוא:

נמצא משוואת ישר על פי שיפוע זה ונקודה A :

$$\begin{aligned} y+1 &= \frac{12}{5}(x+9) \\ y &= \frac{12}{5}x + 20\frac{3}{5} \\ 5y &= 12x + 103 \end{aligned}$$

תשובה: משוואת המשיק בנקודה A : $12x - 5y + 103 = 0$

פתרון שאלה 3

הנתונים :

45% מהסטודנטים באוניברסיטה זו עובדים בנוסף ללימודיהם.
 ההסתברות לבחור באקראי סטודנט שלומד מתמטיקה וגם לא עובד גדולה פי 3.5 מההסתברות
 לבחור באקראי סטודנט שעובד וגם לא לומד מתמטיקה.
 ההסתברות שסטודנט לומד מתמטיקה במסגרת לימודיו היא 0.7.

נארגן את הנתונים בטבלה :

סה"כ	לא לומדים מתמטיקה $\bar{A}$	לומדים מתמטיקה A	
0.45 (1)	$x = 0.1$ (5)	$\begin{cases} 0.45 - x \\ 0.7 - 3.5x \end{cases} = 0.35$ (7)	עובדים B
0.55 (2)	0.2 (8)	$3.5x = 0.35$ (6)	לא עובדים $\bar{B}$
1	0.3 (4)	0.7 (3)	סה"כ

הנימוקים למילוי הטבלה :

- נתון
- השלמה ל-1
- נתון
- השלמה ל-1
- נסמן ב- x את ההסתברות שייבחר סטודנט שלא לומד מתמטיקה וגם עובד.
- ההסתברות לסטודנט שלומד מתמטיקה ולא עובד גדולה פי 3.5 מההסתברות לסטודנט שלא לומד מתמטיקה וגם עובד ולכן היא $3.5x$.
- נבנה משוואה על פי הנתונים :

$$P(A \cap B) = P(B) - P(\bar{A} \cap B) = 0.45 - x$$

$$P(A \cap B) = P(A) - P(\bar{B} \cap A) = 0.7 - 3.5x$$

$$0.45 - x = 0.7 - 3.5x$$

$$2.5x = 0.25$$

$$x = 0.1$$

נשלים את שלבים 5, 6, 7 על פי ערכו של x שמצאנו :

$$\begin{aligned}\bar{A} \cap B &= 0.1 \\ \bar{B} \cap A &= 0.35 \\ A \cap B &= 0.35\end{aligned}$$

$$\bar{A} \cap \bar{B} = 0.3 - 0.1 = 0.2 \quad .8$$

תשובות לסעיפי השאלה:

א. נגדיר את המאורע T: ייבחר סטודנט שלומד מתמטיקה בתנאי שהוא עובד:

$$\begin{aligned}P(T) &= P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ P(T) &= P(A/B) = \frac{0.35}{0.45} = \frac{7}{9} = 0.778\end{aligned}$$

ב. ההסתברות לבחור סטודנט שאינו עובד אן שלומד מתמטיקה:

דרך א: 35% מהסטודנטים לא עובדים וגם לומדים מתמטיקה ולכן הם נספרים פעמיים:
פעם אחת כלא עובדים ופעם אחת כלומדים מתמטיקה. לכן יש להחסיר מהסכום

$$P(\bar{B} \cap A) \text{ את } P(\bar{B}) + P(A)$$

$$\begin{aligned}P &= P(\bar{B}) + P(A) - P(\bar{B} \cap A) = 0.55 + 0.70 - 0.35 \\ P &= 0.9\end{aligned}$$

דרך ב: מניית המקרים המתאימים למאורע: עובדים ולומדים מתמטיקה + עובדים ולא לומדים מתמטיקה + לא עובדים ולומדים מתמטיקה.

$$P = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.35 + 0.35 + 0.2 = 0.9$$

דרך ג: המשלים למקרה היחיד שאינו מתאים למאורע שהוא עובדים ולא לומדים מתמטיקה.

$$P = 1 - P(\bar{A} \cap B) = 1 - 0.1 = 0.9$$

פתרון שאלה 4

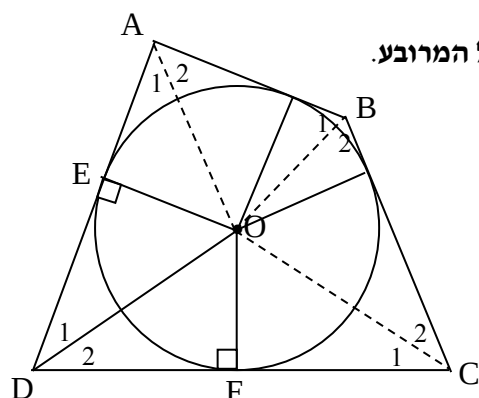
א. צ"ל: מרכז המעגל החסום במרובע הוא מפגש חוצי הזוויות של המרובע.

הוכחה:

נוכיח לדוגמה כי $\angle D_1 = \angle D_2$

(ואז, באותו אופן מוכיחים לגבי הזוויות האחרות)

* כל מידות האורך, בס"מ.

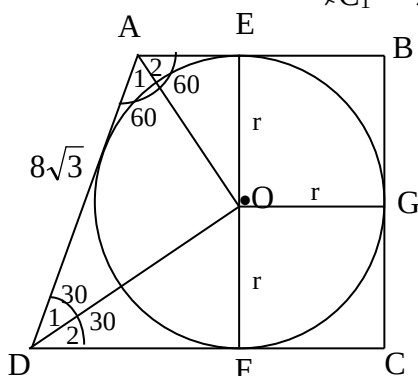


נימוק	טענה	
נתון	שוקיו של מרובע ABCD החוסם מעגל, משיקות למעגל	1.
רדיוס המגיע לנקודת ההשקה מאונך למשיק	$\angle DEO = \angle DFO = 90^\circ$	2.
שני משיקים היוצאים מנקודה אל מעגל שווים זה לזה	$DE = DF$	3.
שניהם רדיוסים במעגל	$OE = OF$	4.
משפט חפיפה צ.ז.צ	$\triangle DEO \cong \triangle DFO$	5.
זוויות מתאימות במשולשים חופפים	$\angle D_1 = \angle D_2$	6.

הוכחנו למעשה את המשפט –

הישר המחבר נקודת מפגש משיקים עם מרכז המעגל חוצה את הזווית בין המשיקים.

באותו אופן מוכיחים כי $\angle C_1 = \angle C_2$, $\angle B_1 = \angle B_2$, $\angle A_1 = \angle A_2$



ב. ABCD הוא טרפז ישר זווית, $\angle C = \angle B = 90^\circ$

נתון: $\angle ADC = 60^\circ$, $AD = 8\sqrt{3}$ ס"מ

נחשב את שטח הטרפז ABCD:

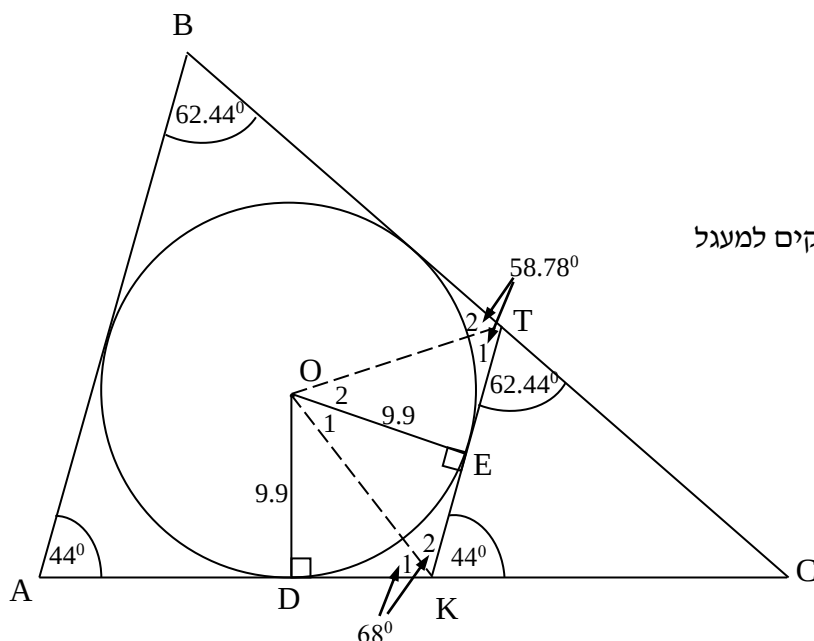
נימוק	טענה	
נתון	$\angle ADC = 60^\circ$, $AD = 8\sqrt{3}$	1.

2.	$\angle DAB = 120^\circ$	סכום זוויות סמוכות בטרפז שאינן על אותו בסיס הוא 180°
3.	$\angle D_1 = \angle D_2 = 30^\circ$ $\angle A_1 = \angle A_2 = 60^\circ$	מרכז מעגל חסום במרובע (הפעם טרפז) הוא מפגש חוצי זוויות (הוכח בסעיף א) או – הישר המחבר מפגש משיקים עם מרכז המעגל חוצה את הזווית בין המשיקים
4.	$\angle AOD = 90^\circ$	השלמת סכום הזוויות במשולש ל- 180°
5.	$AO = 4\sqrt{3}$	במשולש $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$ הניצב מול ה- 30° שווה למחצית היתר
6.	$DO^2 + AO^2 = AD^2$	משפט פיתגורס במשולש ישר-זווית AOD
7.	$OD^2 = AD^2 - AO^2$ $OD^2 = 192 - 48$ $OD = 12$	הצבה וחישוב
8.	$OF = r = 6$	במשולש $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$ הניצב מול ה- 30° שווה למחצית היתר
9.	$OF = OE = 6$	רדיוסים במעגל שווים באורכם
10.	$OF \perp DF, OE \perp AB, OG \perp BC$	רדיוס המגיע לנקודת השקה מאונך למשיק
11.	$FD^2 = OD^2 - FO^2$ $FD^2 = 144 - 36 = 108$ $DF = 6\sqrt{3}$	משפט פיתגורס במשולש ישר-זווית DFO הצבה וחישוב
12.	$\angle B = \angle C = \angle G$	זוויות בטרפז ישר זווית + זווית בין רדיוס למשיק בנקודת ההשקה היא זווית ישרה
13.	EBGO ו-OGCF מלבנים	מרובע בעל שלוש זוויות ישרות הוא מלבן
14.	$EB = OG = FC = r = 6$	צלעות נגדיות במלבנים EBOG ו-OGCF
15.	$AE = 2\sqrt{3}$	הניצב מול ה- 30° שווה למחצית היתר AO
16.	$AB = 6 + 2\sqrt{3}$ $DC = 6 + 6\sqrt{3}$ $EF = 6 + 6$	חיבורי קטעים שנמצאו בסעיפים קודמים
17.	$S_{ABCD} = \frac{(AB + DC) \cdot EF}{2}$ $S_{ABCD} = \frac{(6 + 2\sqrt{3} + 6 + 6\sqrt{3}) \cdot 12}{2}$ $S_{ABCD} = 155.14 \text{ סמ}^2$	נוסחת שטח טרפז

פתרון שאלה 5

נתונים:

- $$\begin{array}{ll}
 \text{AB} = m''\nabla 30 & .1 \\
 \sphericalangle \text{B} = 62.44^0 & .2 \\
 \sphericalangle \text{A} = 44^0 & .3 \\
 \text{R} = m''\nabla 9.9 & .4 \\
 \text{BC} , \text{AC} , \text{KT} & .5 \\
 \text{KT} \parallel \text{AB} & .6
 \end{array}$$



א. נחשב את אורך הקטע KT

נימוק	טענה	
נתון	$\angle B = 62.44^\circ, \angle A = 44^\circ$	1.
נתון	$KT \parallel AB$	2.
זוויות מתאימות בישרים מקבילים	$\angle BAC = \angle TKC = 44^\circ$ $\angle ABC = \angle KTC = 62.44^\circ$	3.
נתון	AB , BC , AC , KT משיקים למעגל	4.
הרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה	$OE \perp KT, OD \perp AK$	5.
סכום שתי זוויות צמודות הוא 180°	$\angle AKT = 180 - 44^\circ$ $\angle BTK = 180 - 62.44^\circ$	6.
קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודת מפגש המשיקים למעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים	$\angle K_1 = \angle K_2 = \frac{180 - 44}{2} = 68^\circ$ $\angle T_1 = \angle T_2 = \frac{180 - 62.44}{2} = 58.78^\circ$	7.
הרדיוסים במעגל שווים + נתון	$OE = OD = 9.9$	8.

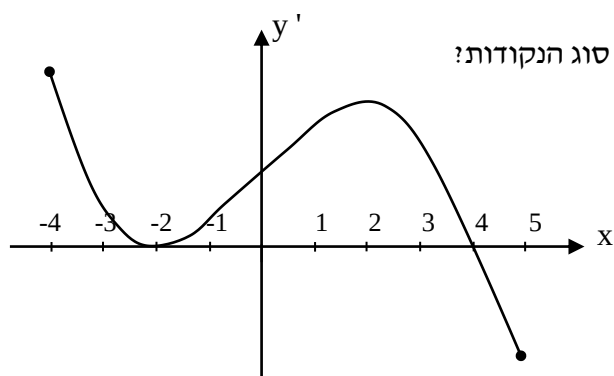
הגדרת טנגנס במשולש ישר-זווית OEK	$\frac{OE}{EK} = \frac{9.9}{EK} = \tan 68$ $EK = \frac{9.9}{\tan 68} = 4$	.9
הגדרת טנגנס במשולש ישר-זווית OET	$\frac{OE}{ET} = \frac{9.9}{ET} = \tan 58.78$ $EK = \frac{9.9}{\tan 58.78} = 6$	.10
השלם שווה לסכום חלקיו	$KT = EK + ET = 4 + 6$ $KT = 10 \text{ ס"מ}$	.11

ב. נחשב את היחס $\frac{S(\Delta KTC)}{S(\Delta ABC)}$

משפט דמיון ז.ז. וטענה 3	$\Delta ABC \sim \Delta KTC$	.12
נתון	$AB = 30 \text{ ס"מ}$	.13
	יחס הדמיון: $\frac{KT}{AB} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$	.14
במשולשים דומים יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון	$\frac{S(\Delta KTC)}{S(\Delta ABC)} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$	.15

פתרון שאלה 6

בציור מתואר הגרף של הפונקציה $f'(x)$ שהיא הנגזרת של פונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \leq x \leq 5$.



נמצא: באילו ערכים של x יש ל- $f(x)$ נקודות קיצון ומה סוג הנקודות?
תחומי העלייה ותחומי הירידה?

א. לפונקציה יש נקודות קיצון כאשר הנגזרת מתאפסת ובקצה התחום.

נקודות אלו מתקבלות כאשר: $x = -4$, $x = -2$, $x = 4$, $x = 5$.

ב. נציג את הנתונים מהגרף בטבלה:

x	$x = -4$	$-4 < x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 4$	$x = 4$	$4 < x < 5$	$x = 5$
$f'(x)$ סימן	+	+	0	+	0	-	-
תיאור	מינימום קצה		פיתול		מקסימום		מינימום קצה

תחומי עלייה ותחומי ירידה:

עלייה $-4 < x < -2$

עלייה $-2 < x < 4$

ירידה $4 < x < 5$

נקודות הקיצון:

$x = -4$ מינימום (קצה תחום)

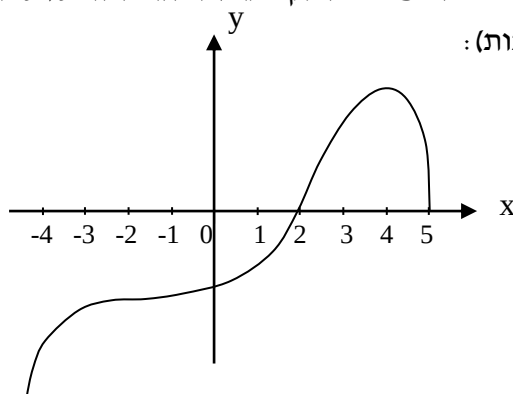
$x = -2$ פיתול

$x = 4$ מקסימום

$x = 5$ מינימום (קצה תחום)

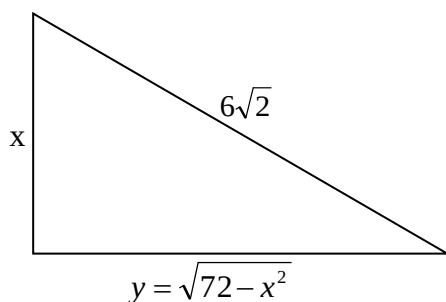
ג. $f(x)$ חותכת את ציר x ב $x = 2$ וב $x = 5$ ומקיימת את התכונות שרשמנו בסעיף ב.

סקיצה אפשרית (אחת מרבות):



פתרון שאלה 7

נמצא מהו השטח המקסימלי של משולש ישר-זווית אשר אורך היתר שלו הוא $6\sqrt{2}$:



המשולש :

נסמן את אחד הניצבים ב- x .

תחום ההצבה של x : $0 < x < 6\sqrt{2}$. (אורך של ניצב במשולש ישר-זווית הוא חיובי וקצר מהיתר.)

נבטא את הניצב השני של המשולש בעזרת משפט פיתגורס והיתר הנתון :

$$x^2 + y^2 = (6\sqrt{2})^2$$

$$y^2 = 72 - x^2$$

$$y = \sqrt{72 - x^2}$$

שטח המשולש צריך להיות מקסימלי. נבטא את שטח המשולש כפונקציה של x :

$$S(x) = x \cdot \sqrt{72 - x^2}$$

נגזור את הפונקציה באמצעות כלל המכפלה :

$$S'(x) = 1 \cdot \sqrt{72 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{72 - x^2}}$$

$$S'(x) = \sqrt{72 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{72 - x^2}} \quad / \quad \sqrt{72 - x^2} \quad \text{מכנה משותף} :$$

$$S'(x) = \frac{\sqrt{72 - x^2}^2 - x^2}{\sqrt{72 - x^2}}$$

$$S'(x) = \frac{72 - 2x^2}{\sqrt{72 - x^2}}$$

למציאת נקודות הקיצון נשווה נגזרת לאפס :

$$S'(x) = \frac{2(36 - x^2)}{\sqrt{72 - x^2}} = 0$$

$$36 - x^2 = 0$$

$$(6 - x)(6 + x) = 0$$

$$\underline{x = 6}, \quad x = -6$$

התשובה השלילית אינה מתאימה כאורך צלע ולכן התשובה האפשרית היחידה היא $x = 6$.

נוכיח שלערך זה מתקבל שטח מקסימלי. לצורך כך נגזור את המונה של הנגזרת (הצדקה לשימוש זה ראו בנספח 2):

$$[\text{מונה } S'(x)]' = 2(-2x) = -4x$$

$$[\text{מונה } S'(6)]' = -4 \cdot 6 = -24 < 0 \Rightarrow \max$$

נגזרת המונה של הנגזרת בנקודת הקיצון שלילית ולכן הנקודה נקודת **מקסימום**.

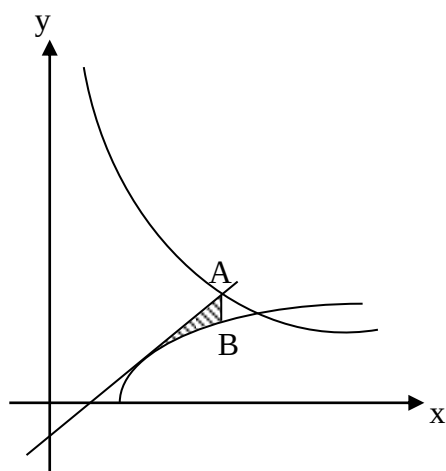
שטח המשולש הוא מקסימלי כאשר $x = 6$.

השטח המקסימלי :

$$S(6) = 6 \cdot \sqrt{72 - 36}$$

$$S(\max) = 36$$

פתרון שאלה 8



נתונות הפונקציות: $f(x) = \sqrt{2x-6}$, $g(x) = 7.5 - \sqrt{x-1}$.

- מהו תחום ההגדרה של כל אחת מהפונקציות?
- בנקודה שבה $x = 5$ העבירו משיק לגרף הפונקציה $f(x)$. מצאו את משוואת המשיק.
- המשיק שמצאתם בסעיף ב חותך את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה A ששיעור ה- x שלה קטן מ-12. ישר היורד מנקודה A ומקביל לציר y חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה B. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$, המשיק והישר AB (השטח המקווקו).

פתרון:

א. **תחום ההגדרה של הפונקציות:**

$$\begin{aligned} 2x - 6 &\geq 0 & : f(x) \\ x &\geq 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 1 &\geq 0 & : g(x) \\ x &\geq 1 \end{aligned}$$

נזהה איזה גרף מתאר כל אחת מהפונקציות הנתונות:

קל לראות ש- $f(3) = \sqrt{2 \cdot 3 - 6} = 0$ ולכן הפונקציה שחותכת את ציר x היא הפונקציה $f(x)$. הפונקציה השנייה (היורדת) היא הפונקציה $g(x)$.

ב. נקודת ההשקה על $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(5) &= \sqrt{2 \cdot 5 - 6} = 2 \\ P &= (5, 2) \end{aligned}$$

למציאת שיפוע המשיק נגזור את $f(x)$ ונמצא את ערך הנגזרת בנקודה שבה $x = 5$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{2\sqrt{2x-6}} = \frac{1}{\sqrt{2x-6}} \\ f'(5) &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 5 - 6}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

משוואת המשיק :

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 5)$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

ג. נקודה A היא נקודת חיתוך בין $g(x)$ למשיק :

$$\begin{cases} g(x) = 7.5 - \sqrt{x-1} \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$7.5 - \sqrt{x-1} = 0.5x - 0.5 \quad / + 0.5$$

$$8 - \sqrt{x-1} = 0.5x$$

$$8 - 0.5x = \sqrt{x-1} \quad / \cdot 2$$

$$16 - x = 2\sqrt{x-1} \quad / ()^2$$

$$256 - 32x + x^2 = 4(x-1)$$

$$x^2 - 36x + 260 = 0$$

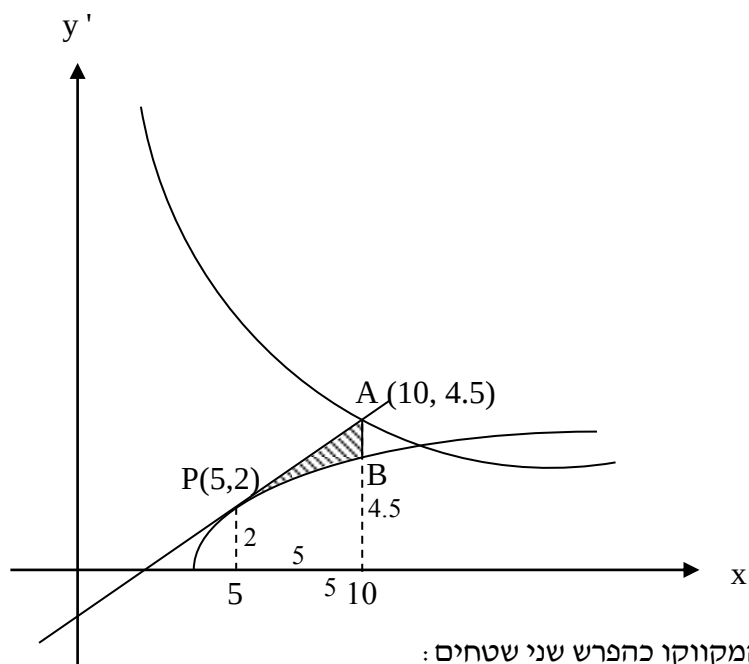
$$x_{1,2} = \frac{36 \pm \sqrt{36^2 - 4 \cdot 260}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{36 \pm 16}{2}$$

$$x_1 = 10$$

$$x_2 = 26 \text{ (לא מתאים)}$$

$$A = (10, 4.5)$$



חישוב השטח המקווקו כהפרש שני שטחים :

S_1 – השטח מתחת לגרף הפונקציה $f(x)$

S_2 – השטח מתחת לקו הישר שהוא שטח של טרפז

$$S_1 = \int_5^{10} \sqrt{2x-6} dx = \int_5^{10} (2x-6)^{0.5} dx$$

$$S_1 = \frac{(2x-6)^{1.5}}{2 \cdot 1.5} \Big|_5^{10} = \frac{(2x-6)\sqrt{2x-6}}{3} \Big|_5^{10}$$

$$S_1 = \frac{14 \cdot \sqrt{14}}{3} - \frac{4 \cdot \sqrt{4}}{3} = 14.79$$

בטרפז שנוצר מתחת לקו הישר אורכי הבסיסים הם : 2 ו-4.5 והגובה 5.

נציב בנוסחת שטח של טרפז :

$$S_2 = \frac{(2+4.5) \cdot 5}{2}$$

$$S_2 = 16.25$$

השטח המקווקו :

$$S_T = 16.25 - 14.79$$

$$\underline{S_2 = 1.46}$$

פתרון מבחן 20

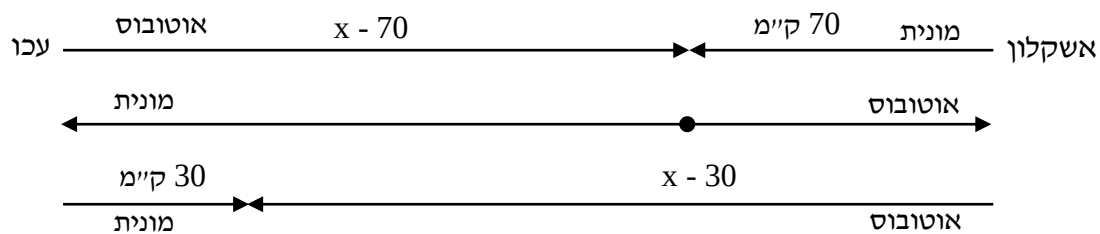
פתרון שאלה 1

נתונים:

יצאו בו-זמנית זה לקראת זה.

נפגשו במרחק 70 ק"מ מאשקלון, והמשיכו כל אחד בדרכו בלי לעצור.
כשהגיעו – האוטובוס לאשקלון והמונית לעכו, יצאו בלי להתעכב בדרכם חזרה למקום מוצאם.
בדרכם חזרה, נפגשו שוב במרחק 30 ק"מ מעכו.

הצגת הנתונים באיור שממחיש את תנועת כלי הרכב:



נסמן: V_m – מהירות המונית, V_a – מהירות האוטובוס, x – המרחק בין עכו לאשקלון.

הצגת הנתונים בטבלה:

S ק"מ	V קמ"ש	T שעות		
70	V_m	$\frac{70}{V_m}$	מונית	הלוך עד מפגש ראשון
$x-70$	V_a	$\frac{x-70}{V_a}$	אוטובוס	
$x-70$	V_m	$\frac{x-70}{V_m}$	מונית	הלוך מהמפגש הראשון
70	V_a	$\frac{70}{V_a}$	אוטובוס	
30	V_m	$\frac{30}{V_m}$	מונית	חזור עד המפגש השני
$x-30$	V_a	$\frac{x-30}{V_a}$	אוטובוס	

המונית והאוטובוס יצאו בו-זמנית ולכן הזמנים שלהם עד המפגש הראשון היו שווים.
מרגע המפגש הראשון ועד לרגע המפגש השני, המונית והאוטובוס נסעו ברציפות ובמהירות קבועה
ולכן הזמנים מרגע המפגש הראשון עד לרגע המפגש השני היו שווים.

נבטא זאת במערכת המשוואות :

$$\begin{cases} \frac{70}{Vm} = \frac{x-70}{Va} \\ \frac{x-70}{Vm} + \frac{30}{Vm} = \frac{70}{Va} + \frac{x-30}{Va} \end{cases}$$

פתרון המערכת :

$$\begin{cases} \frac{70}{Vm} = \frac{x-70}{Va} \\ \frac{x-70+30}{Vm} = \frac{70+x-30}{Va} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{70}{Vm} = \frac{x-70}{Va} \\ \frac{x-40}{Vm} = \frac{40+x}{Va} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{Va}{Vm} = \frac{x-70}{70} \\ \frac{Va}{Vm} = \frac{40+x}{x-40} \end{cases}$$

$$(x-70)(x-40) = 70(40+x)$$

$$x^2 - 110x + 2800 = 2800 + 70x$$

$$x^2 - 180x = 0$$

$$x(180-x) = 0$$

$$x = 0, \quad x = 180$$

התשובה $x = 0$ אינה מתאימה לתנאי הבעיה ולכן :

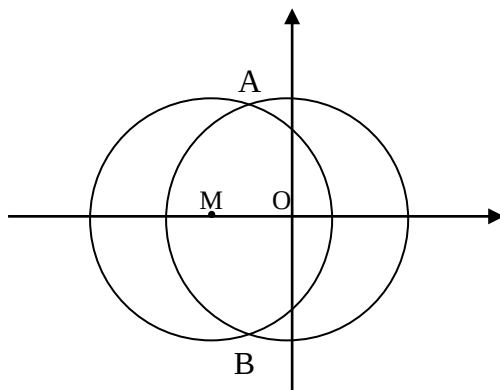
המרחק בין עכו לאשקלון הוא 180 ק"מ.

פתרון שאלה 2

מעגל O: $x^2 + y^2 = 10$. זהו מעגל קנוני שמרכזו (0, 0) ורדיוסו $\sqrt{10}$.

מעגל M: $(x+2)^2 + y^2 = 10$. זהו מעגל שמרכזו (-2, 0) ורדיוסו $\sqrt{10}$.

המעגלים חופפים ומרכזי שניהם נמצאים על ציר x. הציור המתאים הוא:



א. נמצא את נקודות החיתוך בין שני המעגלים.

את נקודות חיתוך שני המעגלים נקבל מפתרון מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} (x+2)^2 + y^2 = 10 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

$$(x+2)^2 + y^2 = x^2 + y^2$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 = x^2 + y^2$$

$$4x + 4 = 0$$

$$x = -1$$

נציב ונחשב את ערכו של y:

$$(-1)^2 + y^2 = 10$$

$$y = \pm 3$$

נקודות החיתוך הן: $A = (-1, 3)$ $B = (-1, -3)$

ב. נמצא את משוואות שני המשיקים.

(i) המשיק למעגל M בנקודה $A(-1, 3)$

שיפוע הרדיוס MA:

$$m_{MA} = \frac{3-0}{-1-(-2)} = 3$$

שיפוע המשיק המאונך לרדיוס זה (באמצעות תנאי הניצבות):

$$m_{\text{משיק}} = -\frac{1}{3}$$

משוואת המשיק למעגל M בנקודה A (-1, 3):

$$y - 3 = -\frac{1}{3}(x + 1)$$

$$y = -\frac{1}{3}x + 2\frac{2}{3}$$

$$\underline{3y = -x + 8}$$

(ii) המשיק למעגל M בנקודה (-1, -3)

שיפוע הרדיוס MB:

$$m_{MB} = \frac{-3 - 0}{-1 - (-2)} = -3$$

שיפוע המשיק המאונך לרדיוס זה (באמצעות תנאי הניצבות):

$$m_{\text{משיק}} = \frac{1}{3}$$

משוואת המשיק למעגל M בנקודה B (-1, -3):

$$y + 3 = -\frac{1}{3}(x + 1)$$

$$y = -\frac{1}{3}x - 2\frac{2}{3}$$

$$\underline{3y = -x - 8}$$

ג. נקודת חיתוך שני המשיקים (פתרון מערכת משוואות):

$$\begin{cases} 3y = x - 8 \\ 3y = -x + 8 \end{cases}$$

$$x - 8 = -x + 8$$

$$2x = 16$$

$$x = 8$$

$$y = 0$$

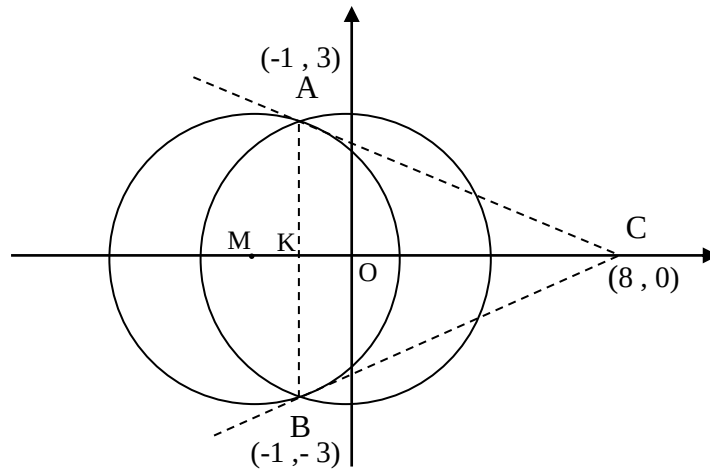
נקודת מפגש המשיקים היא: C(8, 0)

נבדוק את מיקומה של C ביחס למעגל הקנוני:

$$8^2 + 0^2 = 64 > 10$$

מרחקה של הנקודה C מהמרכז O גדול מאורך הרדיוס ולכן C נמצאת מחוץ למעגל O.

ד. שיעור ה-x של נקודות A ו-B שווה ולכן הישר AB מאונך לציר x :



המשולש ABC שנוצר הוא משולש שווה-שוקיים שבו AB הוא הבסיס ו-CK הוא הגובה.

$K = (-1, 0)$ ולכן אורך הגובה :

$$CK = 8 - (-1) = 9$$

אורך הבסיס :

$$AB = 3 - (-3) = 6$$

שטח המשולש ABC :

$$S_{\triangle ABC} = \frac{9 \cdot 6}{2} = 27$$

פתרון שאלה 3

הנתונים:

מספר התלמידים הלומדים בחטיבת-הביניים היה פי שלושה ממספר התלמידים הלומדים בחטיבה העליונה.

40% מכלל התלמידים קיבלו בסוף השליש את הבונוס.

32% מכלל תלמידי חטיבת-הביניים קיבלו את הבונוס.

שלב א – נמצא את אחוז הלומדים בכל חטיבה

נסמן: x – אחוז הלומדים בחטיבה עליונה.

$3x$ – אחוז הלומדים בחטיבת-ביניים.

$$x + 3x = 100$$

$$4x = 100$$

$$x = 25$$

בחטיבת-הביניים לומדים 25% מהתלמידים.

בחטיבה העליונה לומדים 75% מהתלמידים.

שלב ב - נארגן את שאר הנתונים בטבלה:

סה"כ	לא קיבלו בונוס $\bar{B}$	קיבלו בונוס B	
1 75%	8 51%	5 $75\% \cdot 32\% = 24\%$	חטיבת-ביניים A
2 25%	7 9%	6 16%	חטיבה עליונה $\bar{A}$
100%	4 60%	3 40%	סה"כ

הנימוקים למילוי הטבלה:

- ראו חישוב בשלב א
- ראו חישוב בשלב א
- נתון
- השלמה ל-100%
- 32% מכלל הלומדים בחטיבת-הביניים קיבלו בונוס. נרשום כהסתברות מותנית:

$$P(\text{תלמיד חט"ב} \cap \text{קיבל בונוס}) = \frac{P(\text{תלמיד חט"ב} \cap \text{קיבל בונוס})}{P(\text{תלמיד חט"ב})}$$

$$\frac{P(A \cap B)}{0.75} = 0.32$$

$$P(A \cap B) = 0.75 \cdot 0.25 = 0.24$$

$$A \cap B = 24\%$$

$$40\% - 24\% = 16\% \quad .6$$

$$25\% - 16\% = 9\% \quad .7$$

$$60\% - 9\% = 51\% \quad .8$$

תשובות לסעיפי השאלה:

$$P(\text{קיבל בונוס} \cap \text{תלמיד חט"ב}) = P(A \cap B) = 0.75 \cdot 0.25 = 0.24 \quad \text{א.}$$

פירוט הדרך נמצא בנימוק 5 למילוי הטבלה.

ב. ההסתברות שהתלמיד לומד בחטיבה עליונה ונעדר יותר מעשירית מימי הלימודים:

(נעדר יותר מעשירית מימי הלימודים משמעו – לא קיבל את הבונוס.)

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{9}{100} = 0.09$$

ג. איזה אחוז **מבין** התלמידים הלומדים בחטיבה העליונה קיבלו בונוס?

נמצא מה ההסתברות לבחור תלמיד שקיבל בונוס **בתנאי** שהוא תלמיד חטיבה עליונה:

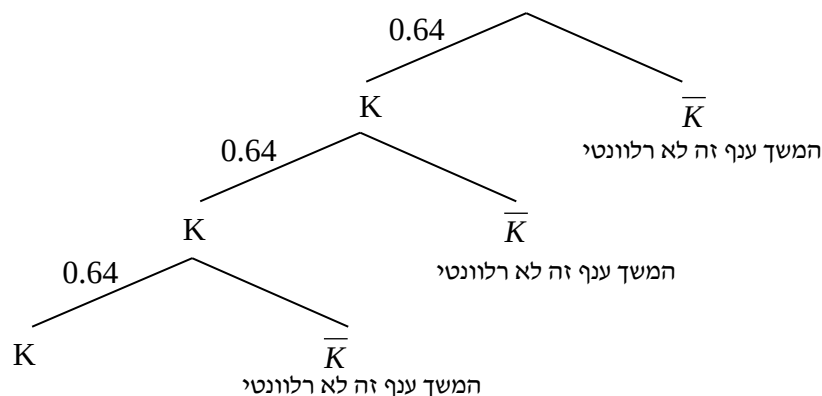
$$P(\text{תלמיד חט"ע} \cap \text{קיבל בונוס}) = \frac{P(\text{תלמיד חט"ע} \cap \text{קיבל בונוס})}{P(\text{תלמיד חט"ע})}$$

$$\frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{16}{25} = 0.64$$

64% מתלמידי החטיבה העליונה קיבלו בונוס.

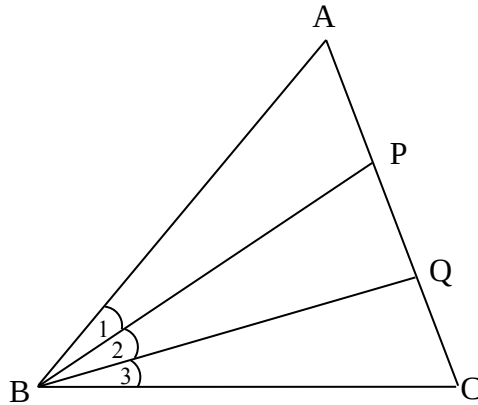
ד. בוחרים שלושה תלמידים הלומדים בחטיבה העליונה. מה ההסתברות ששלושתם קיבלו בונוס?

נסמן ב-K את המאורע שחישבנו בסעיף ג – "קיבל בונוס בתנאי שלומד בחטיבה עליונה" $K =$



$$P(\text{שלושה קיבלו בונוס בתנאי שלומדים בחט"ע}) = 0.64^3 = 0.26$$

פתרון שאלה 4



נתון: $\angle B_1 = \angle B_2 = \angle B_3$

צ"ל: $\frac{BA \cdot BP}{AP} = \frac{BC \cdot BQ}{CQ}$

הוכחה:

נימוק	טענה	
נתון	$\angle B_1 = \angle B_2$	1.
משפט חוצה זווית במשולש ABQ	$\frac{BA}{AP} = \frac{BQ}{QP}$	2.
נתון	$\angle B_2 = \angle B_3$	3.
משפט חוצה זווית במשולש PBQ	$\frac{BP}{BC} = \frac{PQ}{CQ}$	4.
מכפלת אגפי שמאל בטענות 2 ו-4 שווה למכפלת אגפי ימין	$\frac{BA}{AP} \cdot \frac{BP}{BC} = \frac{BQ}{QP} \cdot \frac{PQ}{CQ}$	5.
צמצום באגף ימין	$\frac{BA}{AP} \cdot \frac{BP}{BC} = \frac{BQ}{CQ}$	6.
הכפלת שני האגפים ב-BC	$\frac{BA \cdot BP}{AP} = \frac{BQ \cdot BC}{CQ}$	7.

פתרון שאלה 5

נתונים :

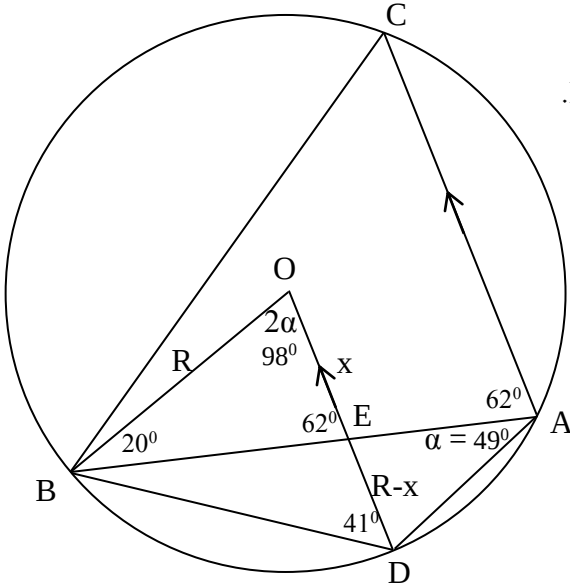
משולש ABC חסום במעגל שרדיוסו R.

הרדיוס OD חותך את הצלע AB בנקודה E (ראו ציור).

א. נתון : $\angle BAD = \alpha$. בטאו באמצעות R ו- α את אורך הצלע BD.

ב. נתון : $OD \parallel AC$, $\alpha = 49^\circ$, $\angle BAC = 62^\circ$.

מצאו את היחס שבין אורך הקטע OE לאורך הקטע ED.



פתרון :

א. נבטא את אורכו של BD :

$$\angle BAD = \alpha \quad (\text{נתון})$$

$\triangle BAD$ חסום במעגל שרדיוסו R ולכן :

$$\frac{BD}{\sin \alpha} = 2R$$

$$BD = 2R \sin \alpha$$

ב. נבטא את אורכי הקטעים OE ו-ED באמצעות R.

נחשב תחילה את הזוויות הרלוונטיות :

$$\alpha = 49^\circ \quad \text{נתון}$$

$$\angle BOD = 2\alpha = 98^\circ \quad \text{זווית מרכזית שווה כפליים הזווית ההיקפית הנשענת על אותו מיתר.}$$

$$BO = OD = R \quad \text{כל הרדיוסים במעגל שווים + נתון.}$$

$$\angle ODB = \angle OBD = 41^\circ \quad \text{זוויות בסיס במשולש שווה-שוקיים שוות + חישוב על סמך המשפט 'סכום הזוויות במשולש הוא 180'.}$$

$$OD \parallel AC \quad \text{נתון}$$

$$\angle BAC = 62^\circ \quad \text{נתון}$$

$$\angle BAC = \angle OEB = 62^\circ \quad \text{זוויות מתאימות בישרים מקבילים.}$$

$$\angle OBE = 20^\circ \quad \text{השלמת סכום הזוויות במשולש OEB ל-180.}$$

משפט הסינוסים במשולש OBE :

$$\frac{x}{\sin 20} = \frac{R}{\sin 62}$$
$$OE = x = \frac{R \sin 20}{\sin 62}$$
$$OE = 0.3874R$$

$$DE = OD - OE \quad (\text{השלם שווה לסכום חלקיו})$$

$$DE = R - \frac{R \sin 20}{\sin 62}$$
$$DE = R \left(1 - \frac{\sin 20}{\sin 62}\right)$$
$$DE = R \frac{\sin 62 - \sin 20}{\sin 62}$$
$$DE = 0.6126R$$

היחס המבוקש :

$$\frac{OE}{DE} = \frac{0.3874R}{0.6126R} = 0.63$$

פתרון שאלה 6

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{mx^2 + 3x + 3}{x^2 - 1}$

- א. לפונקציה הנתונה יש אסימפטוטה אופקית $y = 2$. מהו ערכו של הפרמטר m ?
- ב. הציבו בפונקציה את ערך ה- m שמצאתם בסעיף א וחקרו את הפונקציה המתקבלת (מצאו: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, אסימפטוטות מקבילות לצירים, נקודות קיצון, תחומי עלייה ותחומי ירידה).
- ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

פתרון

- א. נבטא את האסימפטוטה האופקית באמצעות m ונשווה ל-2:

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{mx^2 + 3x + 3}^{\text{נ"ר}}}{\underbrace{x^2 - 1}_{\text{נ"ר}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{mx^2}{x^2} = m$$

$$y = 2 \Rightarrow m = 2$$

ב. הפונקציה: $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 3}{x^2 - 1}$

תחום הגדרה:

$$x^2 - 1 \neq 0$$

$$(x+1)(x-1) \neq 0$$

$$x \neq -1, x \neq 1$$

אסימפטוטות אנכיות: $x = 1$, $x = -1$

אסימפטוטה אופקית: $y = 2$

חיתוך ציר y :

$$f(0) = \frac{3}{-1}$$

$$(0, -3)$$

חיתוך ציר x :

$$2x^2 + 3x + 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 24 < 0$$

אין למשוואה פתרון

אין נקודות חיתוך עם ציר x .

נגזרת:

$$f'(x) = \frac{(4x+3)(x^2-1) - 2x(2x^2+3x+3)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^3+3x^2-4x-3-(4x^3+6x^2+6x)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-3x^2-10x-3}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-(3x^2+10x+3)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-(3x+1)(x+3)}{(x^2-1)^2}$$

נקודות "חשודות":

$$\frac{-(3x+1)(x+3)}{(x^2-1)^2} = 0$$

$$x = -\frac{1}{3}, \quad x = -3$$

שיעורי ה-y של הנקודות ה"חשודות":

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 3}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 1} =$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -2.5$$

$$f(-3) = \frac{2(-3)^2 + 3(-3) + 3}{(-3)^2 - 1} = \frac{18 - 9 + 3}{8}$$

$$f(-3) = 1.5$$

לבדיקת סוג הנקודות ה"חשודות" וקביעת תחומי עלייה ותחומי ירידה:

x	$x < -3$	-3	$-3 < x < -1$	-1	$-1 < x < -\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3} < x < 1$	1	$x > 1$
f(x)	////	1.5	לא רלוונטי	///	לא רלוונטי	-2.5	לא רלוונטי	///	לא רלוונטי
f'(x) סימן	-	0	+	///	+	0	-	///	-
תיאור מסקנות		min		///		max		///	

ריכוז הממצאים:

תחום הגדרה: $x \neq -1, x \neq 1$

אסימפטוטות אנכיות: $x = -1, x = 1$

אסימפטוטה אופקית: $y = 2$

חיתוך צירים: $(0, -3)$, אין חיתוך עם ציר x .

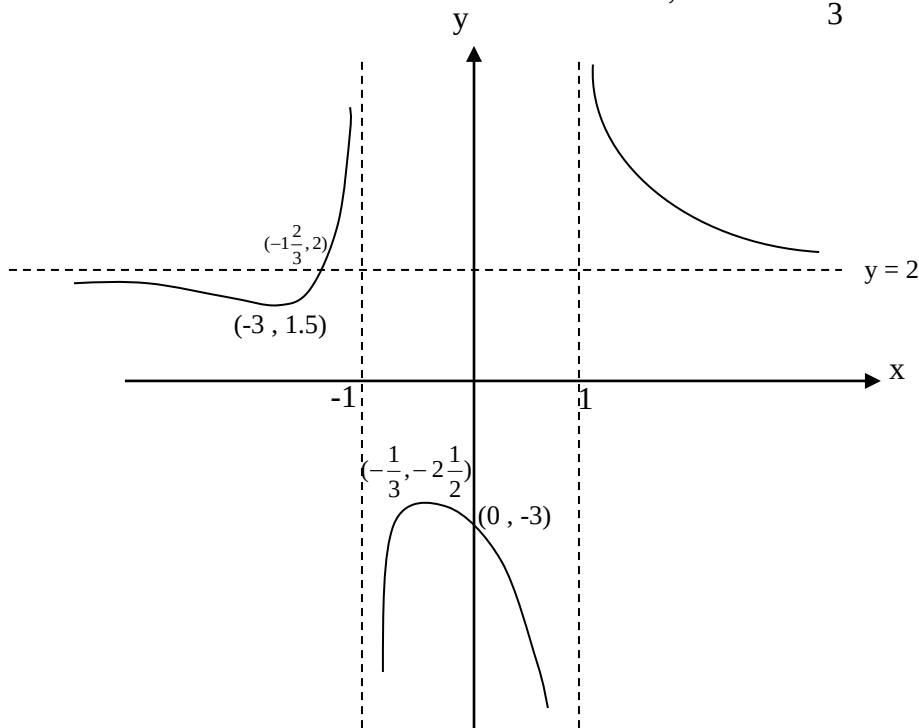
נקודת מינימום: $(-3, 1.5)$

נקודת מקסימום: $(-\frac{1}{3}, -2\frac{1}{2})$

תחומי ירידה: $x < -3, -\frac{1}{3} < x < 1, x > 1$

תחומי עלייה: $-3 < x < -1, -1 < x < -\frac{1}{3}$

הסקיצה:



שימו ♥:

גרף הפונקציה יכול לחתוך את האסימפטוטה האופקית בנקודה הקרובה (יחסית) לראשית הצירים.

למציאת נקודת חיתוך זו נציב $y = 2$ ונפתור את המשוואה:

$$\frac{2x^2 + 3x + 3}{x^2 - 1} = 2$$

$$2x^2 + 3x + 3 = 2(x^2 - 1)$$

$$3x = -5$$

$$x = -\frac{5}{3} = -1\frac{2}{3}$$

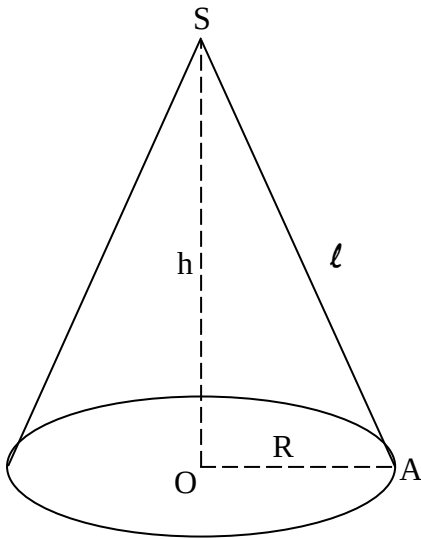
נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם האסימפטוטה האופקית היא: $(-1\frac{2}{3}, 2)$. ראו סימון בסקיצה.

פתרון שאלה 7

נתון: חרוט שנפחו 972π סמ"ק.

הדרישה: שהחרוט יהיה בעל שטח מעטפת מינימלי.

א. נסמן ב- h את גובה החרוט וב- R את רדיוס הבסיס.



הנוסחאות הדרושות:

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3} \quad \text{נפח חרוט:}$$

$$l^2 = R^2 + h^2 \quad \text{לפי משפט פיתגורס:}$$

$$M = \pi R l \quad \text{שטח מעטפת של חרוט:}$$

$$\frac{\pi R^2 h}{3} = 972\pi \quad \text{נתון:}$$

נבטא את R באמצעות h :

$$\frac{\pi R^2 h}{3} = 972\pi$$

$$R^2 h = 2916$$

$$R^2 = \frac{2916}{h}$$

$$R = \sqrt{\frac{2916}{h}}$$

נבטא את הקו היוצר l באמצעות h :

$$l^2 = R^2 + h^2 = \frac{2916}{h} + h^2$$

$$l^2 = \frac{h^3 + 2916}{h}$$

$$l = \sqrt{\frac{h^3 + 2916}{h}}$$

שטח המעטפת כפונקציה של הגובה h :

$$M = \pi Rl$$

$$M(h) = \pi \sqrt{\frac{2916}{h}} \cdot \sqrt{\frac{h^3 + 2916}{h}}$$

$$M(h) = \pi \sqrt{\frac{2916(h^3 + 2916)}{h^2}}$$

$$M(h) = 54\pi \frac{\sqrt{h^3 + 2916}}{h}$$

הנגזרת :

$$M'(h) = 54\pi \frac{\frac{3h^2 \cdot h}{2\sqrt{h^3 + 2916}} - \sqrt{h^3 + 2916}}{h^2}$$

$$M'(h) = 54\pi \frac{3h^3 - 2(h^3 + 2916)}{2h^2 \sqrt{h^3 + 2916}}$$

$$M'(h) = 27\pi \frac{h^3 - 5832}{h^2 \sqrt{h^3 + 2916}}$$

למציאת נקודות קיצון נשווה נגזרת לאפס :

$$M'(h) = 27\pi \frac{h^3 - 5832}{h^2 \sqrt{h^3 + 2916}} = 0$$

$$h^3 - 5832 = 0$$

$$h^3 = 5832$$

$$h = 18$$

נבדוק את סוג הנקודה שקיבלנו :

$$M'(1) = 27\pi \frac{1^3 - 5832}{1^2 \sqrt{1^3 + 2916}} < 0$$

$$M'(20) = 27\pi \frac{20^3 - 5832}{20^2 \sqrt{20^3 + 2916}} > 0$$

x	$0 < h < 18$	18	$h > 18$
$M'(h)$ סימן	-	0	+
		min	

תשובה : כאשר גובה החרוט 18 ס"מ שטח המעטפת יהיה מינימלי.

ב. לחישוב שטח המעטפת המינימלי נציב $h=18$ ונחשב את ערכיהם של R ו- l :

$$R = \sqrt{\frac{2916}{18}} = \sqrt{162} \approx 12.73$$

$$l^2 = R^2 + h^2$$

$$l^2 = 162 + 18^2 = 486$$

$$l = \sqrt{486} \approx 22.045$$

שטח המעטפת המינימלי :

$$M = \pi R l$$

$$M = \pi \sqrt{162} \cdot \sqrt{486}$$

$$M = 280.6 \pi$$

תשובה : שטח המעטפת המינימלי הוא 280.6π סמ"ר.

אפשר גם לחשב את שטח המעטפת המינימלי בעזרת הצבה בפונקציה :

$$M(18) = 54\pi \frac{\sqrt{18^3 + 2916}}{18}$$

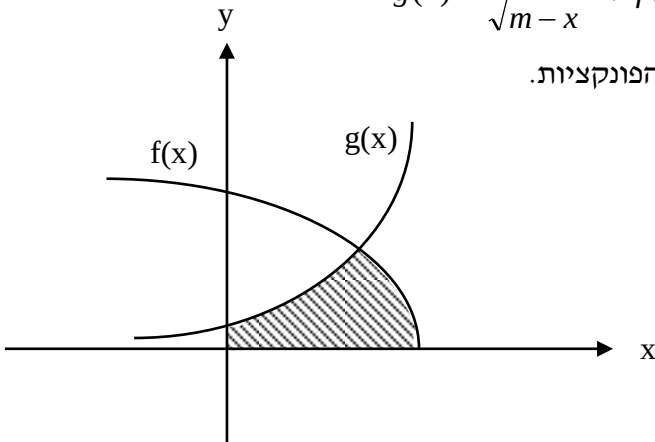
$$M(18) = 3\pi \cdot \sqrt{8748}$$

$$M(18) = 280.6\pi$$

פתרון שאלה 8

הגרפים שבסרטוט שייכים לפונקציות: $f(x) = \sqrt{4-x}$ ו- $g(x) = \frac{1}{\sqrt{m-x}}$.

הישר $x = 4$ מהווה אסימפטוטה אנכית לאחת משתי הפונקציות.



א. נמצא את ערכו של הפרמטר m :

הפונקציה $f(x)$ חותכת את ציר x בנקודה $(4, 0)$ ולכן לא תיתכן אסימפטוטה אנכית לפונקציה זו בערך $x = 4$.

לפונקציה $g(x)$ אין חיתוך עם ציר x ולכן הגרף המתאים ל- $g(x)$ הוא הגרף העולה (ר' סימון בסרטוט).

נבדוק את התנהגות הפונקציה $g(x)$ בסביבת הנקודה שבה $x = 4$.

נתון שלפונקציה יש אסימפטוטה אנכית בערך זה של x ולכן:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{m-x}} = \infty$$

$$m - 4 = 0$$

$$\underline{m = 4}$$

הפונקציות הן: $f(x) = \sqrt{4-x}$ ו- $g(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$.

ב. נחשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$, גרף הפונקציה $g(x)$, ציר ה- x וציר ה- y .

תנאי ההגדרה של $f(x)$ הוא: $4 - x \geq 0$ ולכן תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא $x \leq 4$.

תנאי ההגדרה של $g(x)$ הוא: $4 - x > 0$ ולכן תחום ההגדרה של $g(x)$ הוא $x < 4$.

נקודת החיתוך בין שני הגרפים:

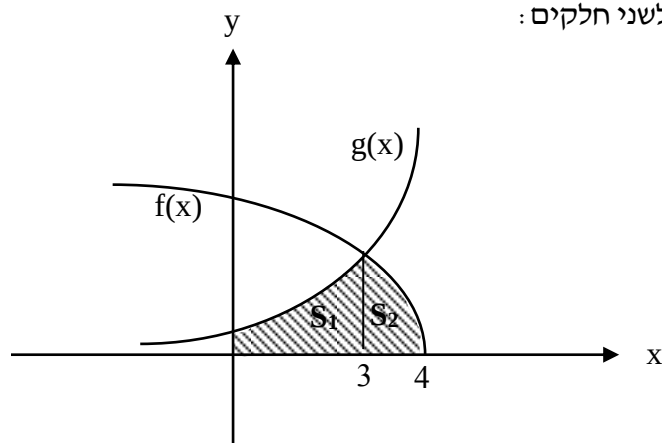
$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \sqrt{4-x}$$

$$1 = \sqrt{4-x}^2$$

$$1 = 4 - x$$

$$x = 3$$

נחלק את השטח לשני חלקים :



מ $x = 0$ עד $x = 3$ – השטח הנמצא מתחת ל- $g(x)$ (נסמן S_1)

מ $x = 3$ עד $x = 4$ – השטח הנמצא מתחת ל- $f(x)$ (נסמן S_2) :

$$S_1 = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{4-x}} dx = \int_0^3 (4-x)^{-0.5} dx$$

$$S_1 = \frac{(4-x)^{0.5}}{0.5 \cdot (-1)} \Big|_0^3 = -2\sqrt{4-x} \Big|_0^3$$

$$S_1 = -2(\sqrt{4-3} - \sqrt{4-0})$$

$$S_1 = -2(1-2)$$

$$S_1 = 2$$

חישוב S_2 :

$$S_2 = \int_3^4 \sqrt{4-x} dx = \int_3^4 (4-x)^{0.5} dx$$

$$S_2 = \frac{(4-x)^{1.5}}{1.5 \cdot (-1)} \Big|_3^4 = -\frac{2}{3}(4-x)\sqrt{4-x} \Big|_3^4$$

$$S_2 = -\frac{2}{3}[(4-4)\sqrt{4-4} - (4-3)\sqrt{4-3}]$$

$$S_2 = -\frac{2}{3}(0-1)$$

$$S_2 = \frac{2}{3}$$

סה"כ השטח :

$$S = S_1 + S_2 = 2 + \frac{2}{3}$$

$$S = 2\frac{2}{3}$$